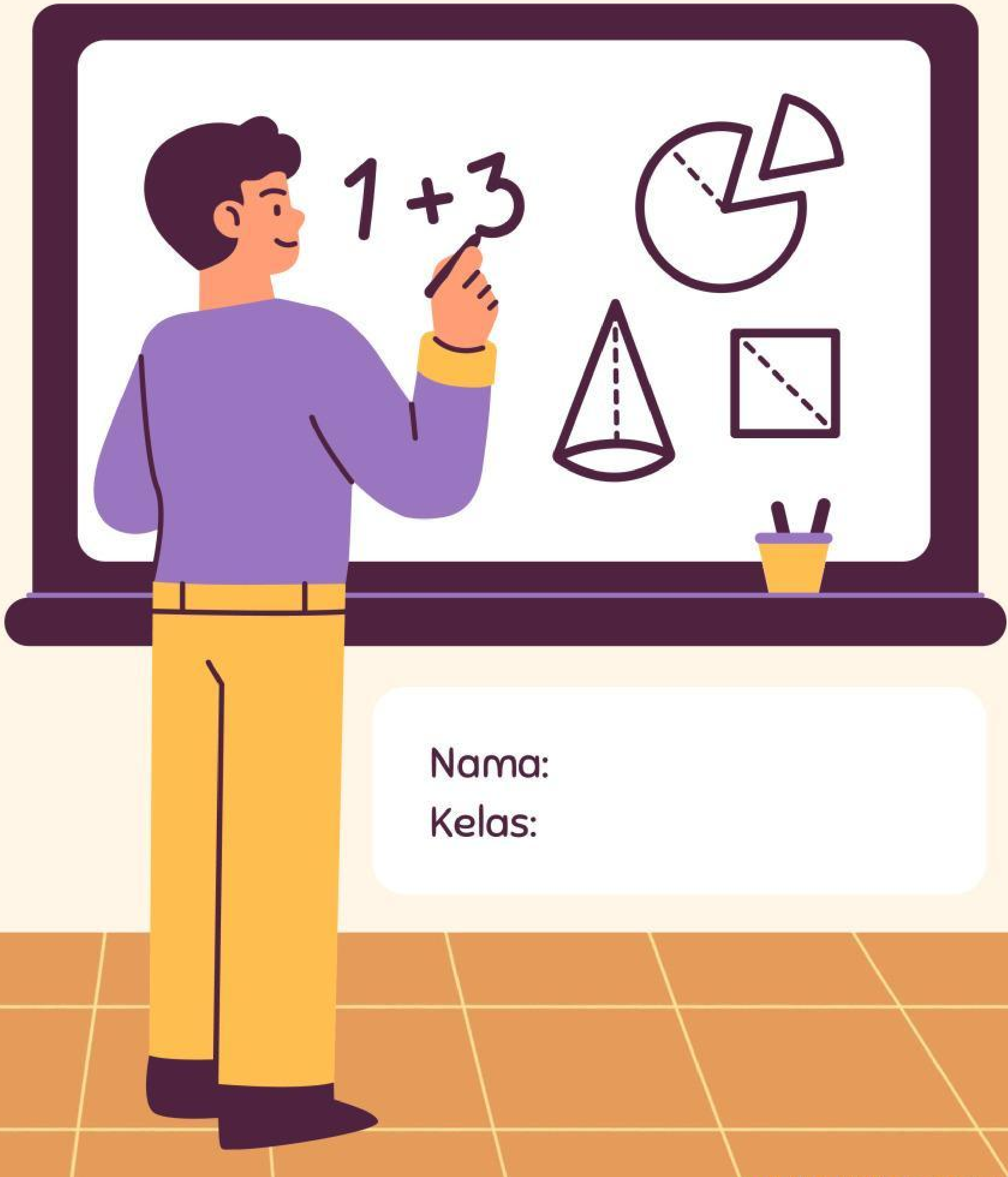
INTEGRAL PARSIAL



Nama:

Kelas:

PENGERTIAN INTEGRAL PARSIAL

Integral parsial adalah teknik yang digunakan dalam kalkulus untuk menghitung integral dari produk dua fungsi. Teknik ini sering digunakan ketika integral yang harus dihitung sulit atau rumit, terutama ketika satu fungsi dapat diintegralkan dengan mudah sementara yang lainnya tidak.Integral parsial bergantung pada aturan perkalian dan aturan integrasi yang memungkinkan kita untuk memecah integral dari produk dua fungsi menjadi dua integral yang lebih sederhana. Metode Integral Parsial ini berawal dari permasalahan dimana kita ingin mencari turunan dari :

$$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

$$u \cdot v = \int u'v\ dx + \int u\, v'\, dx$$

$$\int uv'\, dx = u \cdot v - \int u'\ v\ dx$$

$$karena\ v'(x) = \frac{dv}{dx}, sehingga \rightarrow v'(x)\, dx = dv$$

$$dan\ u'(x) = \frac{du}{dx}, sehingga \rightarrow u'(x)\, dx = du$$

$$\int uv'\, dx = u \cdot v - \int u'\ v\ dx$$

jadi inilah rumus umum untuk Integral Parsial,

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

FUNGSI INTEGRAL PARSIAL

Fungsi utama integral parsial adalah untuk memecah integral produk dua fungsi menjadi dua bagian yang lebih mudah diintegrasikan. Hal ini membantu dalam menyelesaikan integral yang sulit atau kompleks dengan mengurangi integral tersebut menjadi integral yang lebih sederhana. Berikut beberapa fungsi integral parsial:

1. Memecah Integral Sulit.
Integral parsial memungkinkan Anda untuk mengintegrasikan produk dari dua fungsi yang sulit atau kompleks dengan membaginya menjadi dua integral yang lebih sederhana.
2. Mengatasi Produk Fungsi.
Integral produk dua fungsi sering muncul dalam berbagai konteks matematika, fisika, dan rekayasa. Integral parsial membantu dalam menyelesaikan integral ini dengan lebih efisien.
3. Reduksi Integral.
Dengan memilih "u" dan "dv" yang sesuai, integral parsial mengubah integral menjadi bentuk yang lebih dapat diintegrasikan. Ini sering menghasilkan integral yang lebih sederhana atau yang dapat diselesaikan langsung.

KAPAN MENGGUNAKAN INTEGRAL PARSIAL?

1. Ketika sulit/ tidak bisa menggunakan substitusi
2. Biasanya perkalian 2 fungsi beda jenis

   Contoh :

a. $\int xe^x\, dx$

$beda\ jenis\ yang\ satu\ polinomial\ (derajat\ 1\ (x)$
$dan\ yang\ satu\ exponensial\ pangkatnya\ (x))$

a. $\int x\ \sin x\, dx$

$beda\ jenis\ juga\ yang\ satu\ menggunakan\ polinomial\ (x)$
$dan\ yang\ satu\ menggunakan\ trigonometri\ (sinx)$

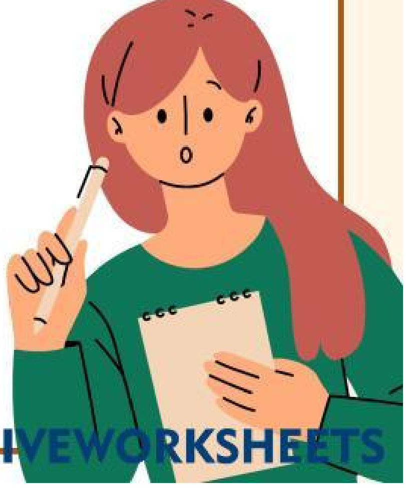
1. Biasanya bentuk invers trigonometri

a. $\int \sin^{-1}(x)dx$

b. $\int ln(x)dx$

Adapun trik cepat dalam menentukan urutan prioritas pemilihan “u” :

$a)\ ln$
$b)\ polinom\ (x)^n$
$c)\ e^x$
$d)\ trigonometri\ \rightarrow biasanya\ dv$



TAHAP-TAHAP PENYELESAIAN INTEGRAL PARSIAL

Misal :

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int u \, dv}$$

I. Inisialisasi menggunakan rumus

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

II. Misalkan :

- $u = f(x)$
- $du = f'(x)$
- $dv = g'(x) dx$
- $v = \int g'(x) dx$

III. Masukkan Kembali ke persamaan dan Hitung

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du}$$

KEGUNAAN INTEGRAL PARSIAL

Integral parsial digunakan dalam berbagai aplikasi, seperti menghitung ketinggian suatu benda yang bergerak dengan kecepatan tinggi. Contohnya, roket dan pesawat ulang-alik. Pesawat yang dibawa roket naik akan mempertahankan kecepatan tinggi dan bertahan di ketinggian. Namun, pada satu titik, roket akan terjun melepaskan diri akibat terbakar atmosfer. Maka ilmuwan menggunakan perhitungan matematis yang disebut integral parsial guna mengetahui ketinggian pesawat saat roket melepaskan diri. Penggunaan Integral Parsial dalam kehidupan, Integral parsial digunakan dalam berbagai bidang, seperti:

a. Astronomi: Dalam menghitung ketinggian suatu benda yang bergerak dengan kecepatan tinggi.

b. Teknik: Dalam menghitung volume dan luas suatu benda.

c. Fisika: Dalam menghitung energi dan momentum suatu benda.

CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1) $\int 2x\,(3x-1)^4 dx = ...$

Misalkan :
$u = 2x$
$du = 2$

Maka, masukkan ke dalam rumus integral parsial :

$dv = \int 2x\,(3x-1)^4 dx$
$v = \int (3x-1)^4 dx$
$v = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(4+1)}\,(3x-1)^{4+1}$
$v = \frac{1}{15}\,(3x-1)^5$

4) $\int x \cos x \, dx = \cdots$

Misal :

$u = x \rightarrow du = dx$
$dv = cosx \rightarrow \int dv = \int cosx\, dx$
$v = sinx$

Maka, masukkan ke dalam rumus integral parsial :
$= uv - \int v\, du$
$= x\, cosx\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du$
$= x\,(sinx) - \int (sinx) dx$
$= x\, sinx - (-cosx) + C$
$= x\, sinx + cosx + C$

$Jadi, \int x\, cosx\, dx = x\, sinx + cosx + C$

6) $\int (3x-5)\sin\left(\frac{x}{6}\right) dx$

Jadi penyelesaian akhir dari soal ini adalah :

$\int (3x-5)\, sin\left(\frac{x}{6}\right) dx = uv - \int vdu$

$= (3x - 5)\,(-6\, cos\left(\frac{x}{6}\right)) - \int (-6\, cos\left(\frac{x}{6}\right))\, 3\, dx$

$= -6(3x - 5)\, cos\left(\frac{x}{6}\right) + 18 \int cos\left(\frac{x}{6}\right) dx$

$= -6(3x - 5)\, cos\left(\frac{x}{6}\right) + 18\,(6\, sin\left(\frac{x}{6}\right))$

$= -6\,(3x - 5)\, cos\left(\frac{x}{6}\right) + 108\, sin\left(\frac{x}{6}\right)$

7) $\int \ln x\, dx$

Misalkan : $u = ln\, x, du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = dx$

$v = x$

maka :

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int ln\, x\, dx = ln\, x\,(x) - \int x\, (\frac{1}{x}\, dx)$

$= x\, ln\, x - x + c$

10) $\int x\, e^x\, dx$

$Misalkan: u = x, du = dx$

$dv = e^x\, dx$

$\int dv = \int e^x\, dx$

$v = e^x$

Maka :

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int x\, e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx$

$= xe^x - e^x = e^x\,(x-1)$

11) $\int cos^2 2x\;\; sin\, 2x\, dx$

Missal $u = cos\, 2x$ *dan* $du = -2\, sin\, 2x,$
Maka : $du = -2 - 2\, sin\, 2x\, dx$
$-du \,\square\, 2 = sin\, 2x\, dx$

Sehingga menghasilkan

$= \int cos^2 2x\;\; sin\, 2x\, dx$

$= \int U^2 \left(-\frac{1}{2}\right) dU = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mu^3}{3}\right) = \frac{\mu^3}{6}$

$= -\frac{U^3}{6} = cos^3\, 2x/6$

12) $\int 6x(3x-1) - \frac{1}{2} dx =$

$Jadi \int 6x(3x-1) - \frac{1}{3} dx$

$= 6x(1/2(3x-1)2/3) - (6)((1/10(3x-1)5)/3) + C$

$= 3x\,(3x-1)2/3 - 6/10(3x-1)5)/3 = +C$

13) $\int (3x+2)\cos(3x+2)\, dx =$

$Jadi \;= (3x+2)1/3\, sin \;\; \int (3x+2) + (3)1/(9\, cos\,(3x+2) + C$
$= (x + 2/3)sin(3x+2) + 1/3\, cos(3x+2) + C$

17) $x.\cos(2^x)\, dx.$
$u = x, dv = \cos(2^x)\, dx$
$du = dx, v = \left(\frac{1}{2}\right)\sin(2x)$
$x.\cos(2^x)\, dx = \left(\frac{1}{2}\right) x\, .\sin(2^x) - \left(\frac{1}{2}\right)\sin(2^x)\;\, dx$
$= \left(\frac{1}{2}\right) x\, .\sin(2^x) + \left(\frac{1}{4}\right)\cos(2^x) + c$

14) $\int x.e^x\, dx =$
Misal :
$u = x \rightarrow du = dx$
$dv = e^x \rightarrow v = e^x dx \rightarrow v = \int e^x\, dx \rightarrow = e^x$

Maka :
$= uv - \int v\, dx$

16) $x^2 \sin(x)\, dx =$

$u = x^2, dv = \sin(x)\, dx$
$du = 2^x dx, v = -\cos(x)$
$x^2.\sin(x)\, dx = -x^2.\cos(x) - (-2^x.\cos(x))dx$
$= -x^2.\cos(x) + 2^x.\cos(x)\, dx$

QUIZ

1) $\int 2(3x+1)^4\, dx =$

2) $\int (x+1)\cos 3x\ \ dx =$

3) $\int x(x+4)5\ \ dx =$

4) $\int arc\ \tan x\ \ dx =$

5) $\int \sin x\, e^x\, dx =$

6) $\int x^2 \ln x\, dx =$

7) $\int x\, e^{6x}\, dx\ =$

8) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx =$

9) $\int x \sin x\, dx\ =$

10) $\int (x+3)\sqrt{2x-5}\, dx =$