Kurikulum Merdeka

BUKU SISWA

MATEMATIKA

BARISAN DAN DERET ARITMATIKA

SMA/MA

X

Ine Clarita Cahya
210210101151

Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

LIVEWORKSHEETS

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas limpahan rahmat dan karunia-Nya kami dapat menyelesaikan penulisan Buku Siswa Matematika Sekolah Menengah Atas ini. Buku ini merupakan salah satu sumber belajar sekaligus sebagai buku pegangan bagi siswa-siswi Sekolah Menengah Atas (SMA)/Madrasah Aliyah (MA)/Sederajat kelas X dengan pokok bahasan Barisan dan Deret.

Buku ini disusun untuk membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret, menyelesaikan permasalahan, dan berlatih berfikir secara kritis, rasional, dan kreatif. Dengan adanya buku ini, kami berharap dapat memudahkan peserta didik dalam belajar matematika. Setiap materi pada sub pokok ataupun sub-bab bahasan kami, disusun secara sistematis dan didasarkan pada satu atau lebih indikator. Buku ini juga kami lengkapi dengan "Mini Lab" untuk mengingat atau memperdalam konsep dasar dari barisan dan deret. Juga terdapat banyak contoh soal dan latihan soal untuk meningkatkan peserta didik berfikir tingkat tinggi (HOTS). Masalah yang kami sajikan dalam buku ini yaitu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dan bersifat terbuka sehingga kreativitas peserta didik diharapkan muncul saat menyelesaikan permasalahan yang disajikan.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Kami juga mengucapkan terimakasih kepada seluruh pihak yang telah membantu pembuatan buku ini. Terakhir guna penyempurnaan buku ini, kami berharap kritik dan saran bagi pembaca demi kebaikan kedepannya.

Bondowoso, 2 Juni 2023

Penulis

LIVEWORKSHEETS

PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU

Nomor subbab

Judul subbab

Capaian pembelajaran yang akan dicapat saat mempelajari materi

Kata-kata yang terdapat dalam pembahasan buku

Mengingat Kembali

Mengingat kembali konsep matematika pada pembahasan sebelumnya

Mini Lab

Melakukan kegiatan untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi

Contoh soal

Contoh soal disertai langkah penyelesaian

Ayo Berpikir Kreatif

Berpikir kreatif jika kalian dapat menemukan ide baru yang berbeda dari hal umum

Ayo Mencoba

Berisi soal dengan penyelesaian mengikuti arahan sebelumnya

Ayo Menyimpulkan

Membuat rangkuman secara mandiri berdasarkan materi yang telah dipelajri

Latihan Soal

Berisi beberapa latihan soal

Tahukah kalian

Kalian mendapat informasi tambahan yang berkaitan dengan materi yang kalian pelajari

LIVEWORKSHEETS

BAB 1

BARISAN DAN DERET ARITMATIKA

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari subbab ini, peserta didik diharapkan dapat:

1. Menentukan beda dan rumus suku ke-n dari barisan aritmatika;
2. Menentukan jumlah suku ke-n dari deret aritmatika;
3. Menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmatika dan deret aritmatika.

Kata Kunci

Barisan aritmatika dan deret aritmatika

LIVEWORKSHEETS

Peta Konsep

BARISAN DAN DERET

BARISAN

DERET

ARITMATIKA

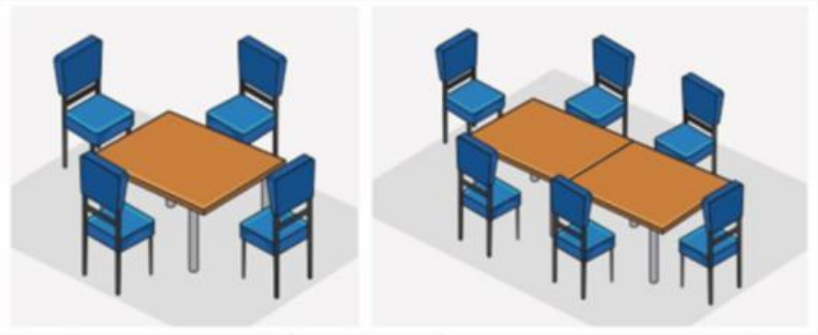
LIVEWORKSHEETS

Mengingat Kembali

Pola bilangan adalah susunan bilangan yang membentuk pola tertentu.
Suku ke-1 dilambangkan dengan U_1
Suku ke-2 dilambangkan dengan U_2
Suku ke-n dilambangkan dengan U_n

Mini Lab 1.1

Amati banyak meja dan kursi pada gambar dibawah ini.



Gambar 1.1 Meja persegi dilengkapiempat kursi

Gambar 1.2 Dua meja persegi disatukan

Pada Gambar 1.1 terdapat satu meja berbentuk persegi yang dilengkapi dengan empat kursi. Jika satu meja persegi tersebut disatukan dengan meja persegi yang lain, maka dapat dilengkapi dengan enam kursi (Gambar 1.2). Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan berdiskusi bersama teman kelompokmu.

1. Berapa orang yang dapat duduk di kursi dengan sejumlah meja disatukan?

Banyak meja	1	2	3	4	5	…
Banyak kursi	4	6	…	…	…	…

Tabel 1.1 Banyak meja dan kursi

2. Jika terdapat 16 orang yang akan makan malam bersama dalam satu meja, maka berapa meja yang perlu disatukan? Jelaskan jawaban anda

LIVEWORKSHEETS

A. BARISAN

Tabel 1.1 menunjukkan pola bilangan: 4, 6, 8, . . ., . . ., . . .
Terdiri dari berapa suku barisan bilangan diatas?

- Suku ke-1 dilambangkan dengan
- Suku ke-2 dilambangkan dengan
- Suku ke-3 dilambangkan dengan
- Suku ke-n dilambangkan dengan

Sehingga, bentuk umum dari barisan bilangan, yaitu

$$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, \ldots, U_n.$$

Definisi
Barisan bilangan adalah himpunan bilangan yang diurutkan menurut suatu aturan tertentu

1. Barisan Aritmatika

- Aturan apa yang ada pada barisan bilangan di Tabel 1.1 tersebut?
- Operasi perhitungan apa yang ada diantara suku-suku pada barisan bilangan diatas?

- Berapakah selisih atau beda antara dua suku yang berdekatan?

$U_2 - U_1 = \ldots - \ldots = \ldots$

$U_3 - U_2 = \ldots - \ldots = \ldots$

$U_4 - U_3 = \ldots - \ldots = \ldots$

- Apakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama?

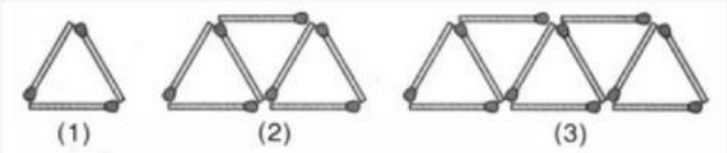
Definisi
Barisan Aritmatika adalah barisan bilangan dengan sifat selisih atau beda antara dua suku yang berdekatan selalu tetap (konstan). Selisih atau beda pada barisan aritmatika ini dilambangkan dengan b

Jadi, untuk mencari beda dapat dilakukan dengan cara mengurangkan dua suku yang berdekatan, dapat ditulis :

$$b = U_2 - U_1 \quad \text{atau} \quad b = U_n - U_{(n-1)}$$

LIVEWORKSHEETS

Perhatikan pola susunan batang korek api dibawah ini



Dina dan Doni sedang menyusun batang korek api dengan pola seperti gambar diatas. Mereka ingin menghitung banyak batang korek api pada susunan ke-25. Bantulah Dina dan Doni untuk menemukannya!

Perhatikan langkah-langkah berkut

- Berapakah beda atau selisih dari pola susunan batang korek api diatas?
- Pola **ke-1** $(\boldsymbol{U_1})$ ada sebanyak 3 batang korek api, maka

  $3 = 3 + (1 - 1) \times 4$
- Pola **ke-2** $(\boldsymbol{U_2})$ ada sebanyak 7 batang korek api, maka

  $7 = \ldots + (2 - 1) \times 4$
- Pola **ke-3** $(\boldsymbol{U_3})$ ada sebanyak . . . batang korek api, maka

  $\ldots = \ldots + (\ldots - 1) \times 4$
- Pola **ke-4** $(\boldsymbol{U_4})$ ada sebanyak . . . batang korek api, maka

  $\ldots = \ldots + (\ldots - \ldots) \times \ldots$
- Pola **ke-5** $(\boldsymbol{U_5})$ ada sebanyak . . . batang korek api, maka

  $\ldots = \ldots + (\ldots - \ldots) \times \ldots$
- Dan seterusnya, sehingga untuk pola ke-n $(\boldsymbol{U_n})$ diperoleh:

  $U_n = a + (\ldots - \ldots) \times \ldots$

Jadi, rumus suku ke-n barisan aritmatika adalah

$$\boxed{U_n = a + (n - 1)b}$$

Ayo Mencoba

Dengan menggunakan rumus diatas, ayo hitunglah banyak batang korek api pada susunan ke-25

LIVEWORKSHEETS

Contoh soal

Rino menabung di bank dengan selisih kenaikan nominal uang yang ditabung antarbulan tetap. Jika pada bulan ke-5, nominal uang yang ditabung Rp70.000,00 dan pada bulan ke-9 Rino menabung sebesar Rp90.000,00

Tentukan:

a. Berapa rupiah selisih nominal uang yang ditabung antarbulan?

b. Tentukan berapa rupiah uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya?

Penyelesaian :

Memahami Masalah

Diketahui :

$U_5 = 70.000$

$U_9 = 90.000$

Ditanya :

a. Berapa rupiah selisih nominal uang yang ditabung antarbulan?

b. Tentukan berapa rupiah uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya?

Menyelesaikan Masalah

$U_5 = 70.000$

$a + (5 - 1)b = 70.000$

$a + 4b = 70.000$ . . . (persamaan 1)

$U_9 = 90.000$

$a + (9 - 1)b = 90.000$

$a + 8b = 90.000$ . . . (persamaan 2)

Eliminasi persamaan 1 dan 2

$$\begin{aligned} a + 8b &= 90.000 \\ a + 4b &= 70.000 \quad - \\ \hline 4b &= 20.000 \\ b &= 5.000 \end{aligned}$$

Selanjutnya menentukan uang yang ditabung Rino pertama kali, yaitu menentukan suku pertama yang dilambangkan dengan a dengan bantuan nilai b (beda) yang telah diketahui. Gunakan persamaan 1, lalu substitusi nilai b (beda) yang telah diperoleh.

$$\begin{aligned} a + 4b &= 70.000 \\ a + 4(5.000) &= 70.000 \\ a + 20.000 &= 70.000 \\ a &= 50.000 \end{aligned}$$

Menyimpulkan Masalah

Jadi,

a. Selisih nominal uang yang ditabung Rino antarbulan adalah Rp5.000

b. Uang yang ditabung Rino untuk pertama kalinya adalah Rp50.000

LIVEWORKSHEETS

Ayo Berpikir Kreatif

Berikan contoh aplikasi barisan aritmatika dalam kehidupan sehari-hari selain yang telah dibahas pada Minilab 1.1

B. DERET

Mengingat Kembali

Beda pada barisan aritmatika dinyatakan dengan $b = U_n - U_{(n-1)}$

Suku ke-n barisan aritmatika dinyatakan dengan $U_n = a + (n-1)b$

Mini Lab 1.2

Ayo bereksplorasi dengan melakukan jabat tangan bersama teman kelompokmu. Kemudian, jawablah pertanyaan di bawah ini dengan berdiskusi bersama teman kelompokmu.

- Jika ada 2 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? . . .
- Jika ada 3 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? . . .
- Jika ada 4 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? . . .

Gambar 1.3 Siswa saling berjabat tangan

- Berapa total anggota kelompokmu? dan berapa jabat tangan yang terjadi? Bagaimana kalian mengetahuinya? . . .

Dari mini lab diatas, banyak jabat tangan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut

Banyak orang	Banyak jabat tangan	Uraian dari banyak jabat tangan
2 orang	1	1
3 orang	3	1 + 2
4 orang	. . .	1 + . . . + . . .

Tabel 1.2 Banyak jabat tangan yang terjadi

LIVEWORKSHEETS

- Apakah uraian dari banyak jabat tangan merupakan bentuk penjumlahan dari barisan bilangan?

Definisi
deret bilangan adalah jumlah suku-suku penyusun barisan bilangan

1. Deret Aritmatika

Tahukah kalian

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) adalah seorang matematikawan Jerman yang telah menunjukkan bakatnya sejak kecil. Ketika duduk di kelas 4 Sekolah Dasar, guru matematikanya memberikan soal berupa penjumlahan bilanga 1 + 2 + 3 + 4 + . . . + 98 + 99 + 100 = . . .
Tidak membutuhkan waktu yang lama, Gauss yang saat itu masih berusia 10 tahun langsung menjawab "5050"

Gambar 1.4
Carl Friedrich Gauss
Sumber: Wikipedia

Berikut cara Gauss menyelesaikan penjumlahan bilangan tersebut

$$\overbrace{\overbrace{1+\underbrace{2+\overbrace{3+4}^{101}+\cdots+97}_{101}+98+\underbrace{99}_{101}}^{101}+100}^{101}$$

Beliau mengelompokkan suku-suku pada deret tersebut sehingga memiliki nilai yang sama ketika dijumlahkan.

$$\begin{aligned}1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100 &= (1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)\\ &= \underbrace{101+101+\cdots+101}_{50\text{ kali}}\\ &= 50\times 101\\ &= 5050\end{aligned}$$

LIVEWORKSHEETS

Sekarang, ayo cermati kembali deret bilangan di atas

1 + 2 + 3 + . . . + 98 + 99 + 100 = . . .

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan?
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas?

Definisi

Deret aritmatika adalah suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku□suku pada barisan aritmatika

Dari barisan aritmatika $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$

Dapat dibentuk deret aritmatika $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n$

$U_1 = a$	$U_6 = a + 5b$
$U_2 = a + b$	$U_7 = a + 6b$
$U_3 = a + 2b$	$U_8 = a + 7b$
$U_4 = a + 3b$	$U_9 = a + 8b$
$U_5 = a + 4b$	$U_{10} = a + 9b$

Jumlah 4 suku pertama deret aritmatika: S_4

$$S_4 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$S_4 = a + a + b + a + 2b + a + 3b$$

$$S_4 = 4a + 6b$$

$$S_4 = 2(2a + 3b)$$

$$S_4 = \frac{4}{2}(2a + (4 - 1)b)$$

Jumlah 10 suku pertama deret aritmatika: S_{10}

$$S_{10} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{10}$$

$$S_{10} = a + a + b + a + 2b + a + 3b + a + 4b + a + 5b$$

$$+a + 6b + a + 7b + a + 8b + a + 9b$$

$$S_{10} = 10a + 45b$$

$$S_{10} = 5(2a + 9b)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a + (10 - 1)b)$$

LIVEWORKSHEETS

Jumlah 4 suku pertama deret aritmatika:	Jumlah 10 suku pertama deret aritmatika:
$S_4 = \frac{4}{2}(2a + (4-1)b)$	$S_{10} = \frac{10}{2}(2a + (10-1)b)$

Dari kedua contoh diatas, maka dapat disimpulkan bahwa:
Jumlah n suku pertama deret aritmatika:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a + (n-1)b)$$

Penjumlahan deret aritmatika dari U_1 menuju U_n dibalik menjadi U_n menuju U_1

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$S_n = a + (a+b) + \cdots + (a + (n-2)b) + (a + (n-1)b)$$

$$S_n = (a + (n-1)b) + (a + (n-2)b) + \cdots + (a+b) + a \quad +$$

$$2S_n = \underbrace{(2a + (n-1)b) + (2a + (n-1)b) + \cdots + (2a + (n-1)b)}_{n\times}$$

$$2S_n = n(2a + (n-1)b)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + [a(n-1)b]) \quad \text{Karena, } U_n = a + (n-1)b$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Jadi, rumus untuk menghitung jumlah suku pada deret aritmatika adalah

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)} \quad \text{atau} \quad \boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)}$$

Keterangan:

S_n	: jumlah suku ke-n	b	: beda
a	: suku pertama	n	: banyaknya suku

Ayo Mencoba

Dengan menggunakan rumus diatas, ayo hitunglah jumlah deret bilangan

1 + 2 + 3 + . . . + 98 + 99 + 100 = . . .

Apakah hasilnya sama dengan perhitungan Gauss?

LIVEWORKSHEETS

Contoh soal

Hitunglah jumlah 30 suku pertama deret 13 + 16 + 19 + 22 + . . .

Penyelesaian :

Memahami Masalah

Diketahui :

a = 13

b = 3

n = 30

Ditanya :

Jumlah 30 suku pertama S_{30} ?

Menyelesaikan Masalah

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$S_{30} = \frac{30}{2}(2(13) + (30-1)3)$$

$$S_{30} = 15\big(26 + 29(3)\big)$$

$$S_{30} = 15(26 + 87)$$

$$S_{30} = 15(113)$$

$$S_{30} = 1695$$

Menyelesaikan Masalah

Jadi, jumlah 30 suku pertama deret 13 + 16 + 19 + 22 + . . . adalah 1695

Ayo Menyimpulkan

LIVEWORKSHEETS

Latihan Soal

1. Doni seorang peternak ayam. Ia mengumpulkan telur ayam sebanyak 30.000 butir selama 2 bulan. Pada hari pertama ia mengumpulkan telus ayam sebanyak 50 butir. Berapa butir telur yang Pak Artus kumpulkan pada hari terakhir?
2. Rina membeli seutas pita, kemudian pita tersebut dipotong 5 bagian. Pita terpendek yang dipotong Rina memiliki panjang 16 cm. Sedangkan, pita terpanjangnya sepannjang 160 cm. Berapa panjang pita semula yang dibeli Rina?
3. Dea membaca buku sebanyak 200 halaman selama 2 jam pada minggu pertama. Minggu berikutnya ia mampu membaca sebanyak 250 halaman pada waktu yang sama. Kemampuan membaca Dea meningkat sampai 2 bulan kedepan. Berapa banyak halaman buku yang dibaca Dea sampai 2 bulan kedepan?
4. Tabel berikut menggambarkan tinggi suatu tanaman dari bulan Januari sampai Maret tahun 2018.

Bulan	Januari	Februari	Maret
Tinggi tanaman (cm)	12	18	24

Jika pertumbuhan tinggi tanaman tetap. Berapa tinggi pohon ketika akhir tahun 2020?

LIVEWORKSHEETS