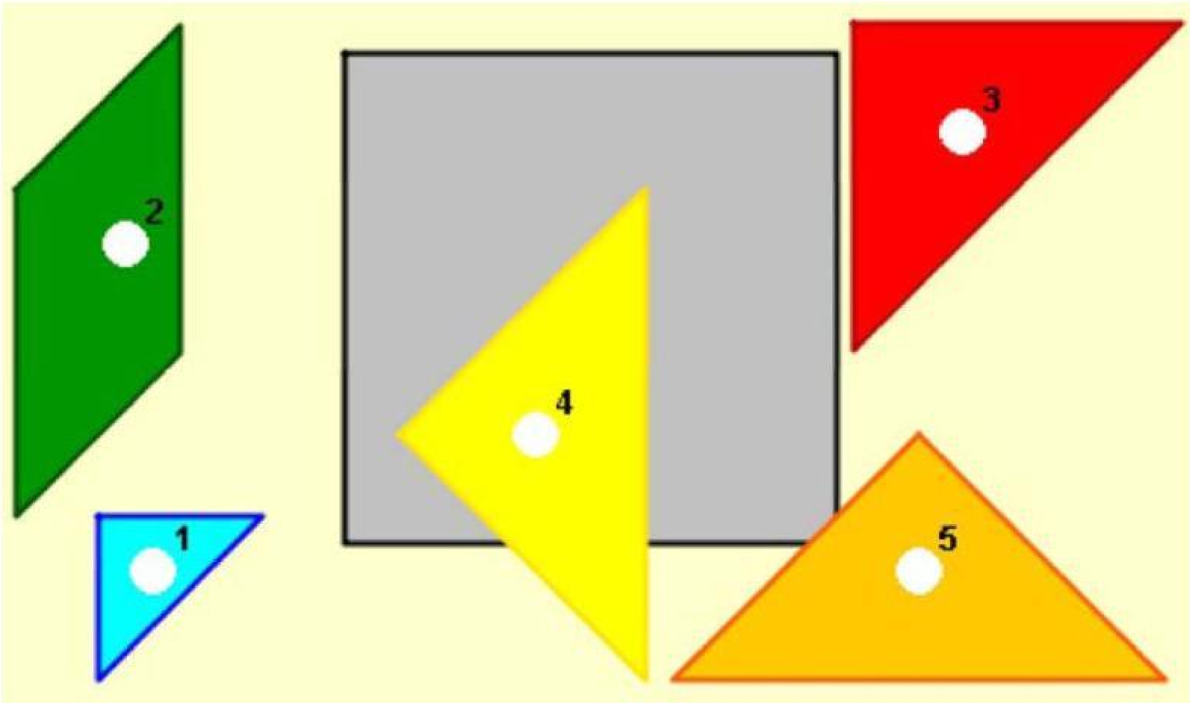
9 Polígonos, perímetros y áreas

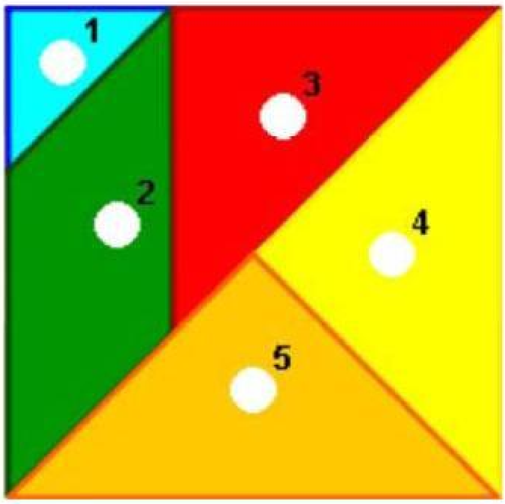
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer, representar e identificar los elementos geométricos que caracterizan a diferentes polígonos.
- Construir triángulos.
- Reconocer las rectas y puntos notables de los triángulos.
- Reconocer y dibujar diferentes tipos de cuadriláteros.
- Reconocer otros polígonos.
- Calcular perímetros de polígonos.
- Calcular áreas de diferentes polígonos.
- Aplicar el cálculo de superficies de polígonos a situaciones de la vida real.

Antes de empezar





Tangram de cinco piezas

Recorta las piezas superiores y sin mirar la solución, intenta construir un cuadrado con todas ellas. Después intenta construir otras figuras.

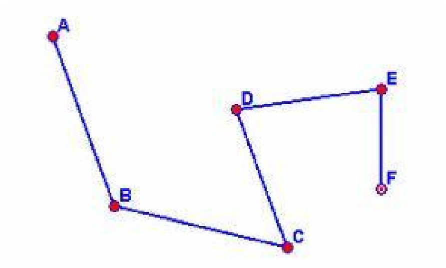
Investiga

¿Qué otro tangram se basa en la división de un cuadrado? ¿Cuántas piezas tiene?

1. Líneas poligonales

Definición y tipos. Polígonos

Una **linea poligonal** es un conjunto de **segmentos concatenados**, (cada uno empieza donde acaba el anterior), y pueden ser: **abiertas** o **cerradas**.



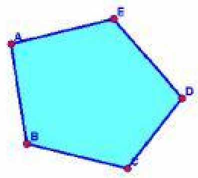
Línea poligonal abierta

> La **superficie** contenida por una **línea poligonal cerrada** se llama **polígono**.

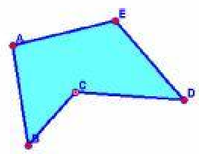
Los polígonos pueden ser:

- **Convexos:** todos sus ángulos interiores son menores de 180º.
- **Cóncavos**: algunos de sus ángulos interiores son mayores de 180º.

Como podrás ver más adelante en este tema, también se clasifican en: **regulares** e **irregulares** y según su número de lados.



Polígono convexo

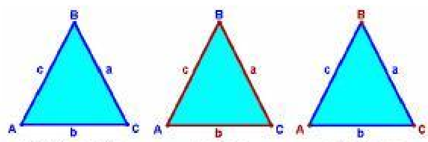


Polígono cóncavo

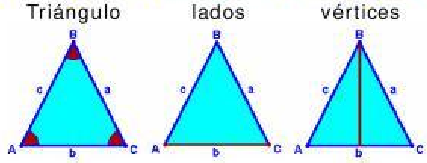
2. Triángulos

Elementos y clasificación

Un **triángulo** es un polígono de tres lados. Sus elementos característicos son: lados, base, altura, vértices y ángulos.



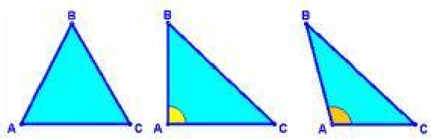
Triángulo — lados — vértices



ángulos — base — altura

Los triángulos se pueden clasificar según sus ángulos en:

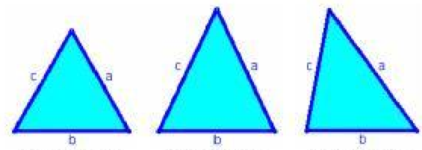
- **Acutángulos:** los tres ángulos agudos.
- **Rectángulos:** un ángulo recto y dos agudos.
- **Obtusángulos:** un ángulo obtuso y dos agudos.



Triángulo acutángulo — Triángulo rectángulo — Triángulo obtusángulo

Según sus lados se clasifican en:

- **Equiláteros:** los tres lados iguales.
- **Isósceles:** dos lados iguales y uno distinto.
- **Escalenos:** los tres lados distintos.

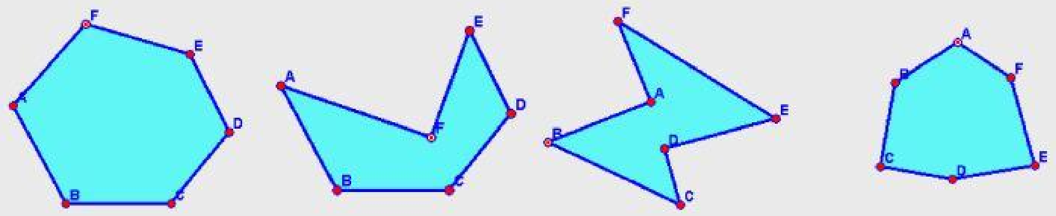


Triángulo equilátero — Triángulo Isósceles — Triángulo escaleno

> Un **triángulo** es un polígono de tres lados.

EJERCICIOS resueltos

1. Indica si los siguientes polígonos son convexos o cóncavos:



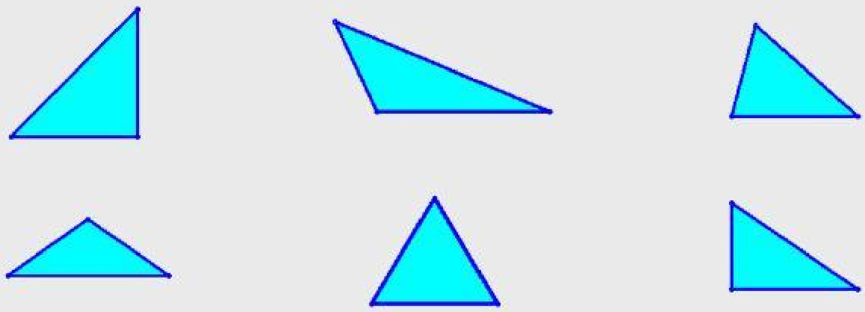
a) Convexo: todos sus ángulos interiores son menores de 180º.

b) Cóncavo: el ángulo F es mayor de 180º.

c) Cóncavo: los ángulos A y D son mayores de 180º.

d) Convexo: todos sus ángulos interiores son menores de 180º.

2. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados y según sus ángulos:



a) Isósceles y rectángulo.

b) Escaleno y obtusángulo.

c) Escaleno y acutángulo.

d) Isósceles y obtusángulo.

e) Equilátero y acutángulo.

f) Escaleno y rectángulo.

3. Completa la siguiente tabla indicando en las casillas en blanco SI o NO, según sea o no posible que un triángulo pueda, a la vez, de los tipos que indica la fila y la columna:

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo	SI	SI	SI
Rectángulo	NO	SI	SI
Obtusángulo	NO	SI	SI

Construcción de triángulos

Para construir un **triángulo** se deben dar uno de los tres casos siguientes:

- **Que conozcamos sus tres lados.**

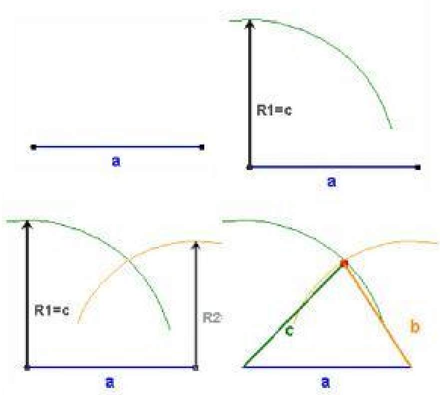
Se toma uno de los segmentos como base.

Con centro en uno de los extremos de este segmento, se traza un arco de radio la longitud de uno de los lados restantes.

Con centro en el otro extremo de la base se traza un arco de radio la longitud del tercer lado.

La intersección de los dos arcos es el tercer vértice del triángulo.

✓ Observa que para que se pueda construir el triángulo la suma de las longitudes de b y de c debe ser mayor que la longitud de a.



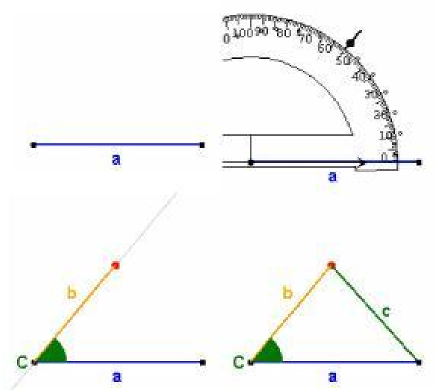
- **Que conozcamos dos lados y el ángulo comprendido.**

Se toma uno de los segmentos como base.

A partir de este lado y con vértice en uno de sus extremos, se mide un ángulo igual al conocido.

Se traza una recta que sea el otro lado del ángulo medido. Sobre esta recta, a partir del vértice del ángulo, se traza el segundo lado conocido.

Finalmente se unen con un segmento los dos vértices que faltan para determinar el triángulo.



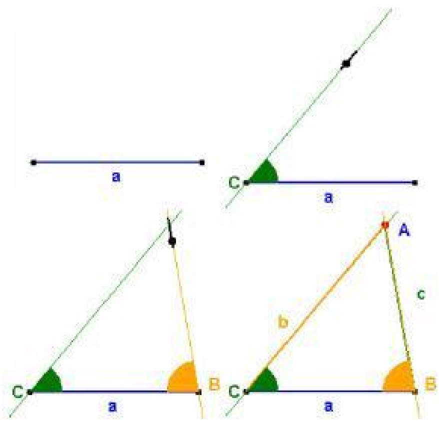
- **Que conozcamos dos ángulos y el lado común a ambos.**

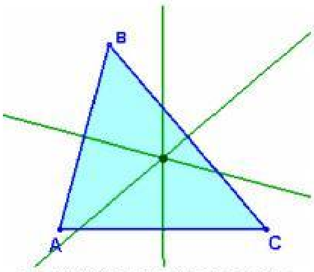
Se toma el segmento conocido como base.

Tomando este segmento como lado, a partir de uno de sus extremos se mide un ángulo igual a uno de los conocidos. Se traza una recta que forme con el segmento ese ángulo.

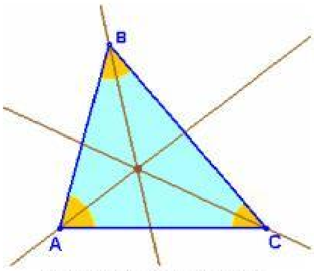
A partir del otro extremo, se mide un ángulo igual al otro que se conoce. Se traza una recta que forme con el segmento ese ángulo.

El punto de intersección de las dos rectas trazadas es el tercer vértice del triángulo.

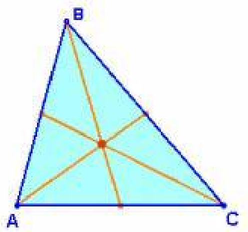




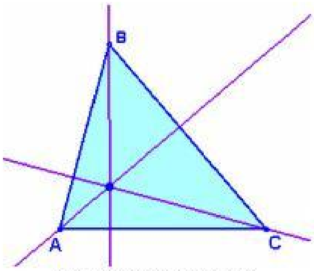
Mediatrices y circuncentro



Bisectrices e incentro



Medianas y baricentro



Alturas y ortocentro

Rectas y puntos notables

En un **triángulo** se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, **rectas notables**. Esas rectas son:

- **Mediatrices:** rectas perpendiculares a cada uno de los lados por su punto medio.

- **Bisectrices:** rectas que dividen a cada uno de los ángulos en dos ángulos iguales.

- **Medianas:** son los segmentos que van de cada vértice al punto medio del lado opuesto.

- **Alturas:** rectas perpendiculares a cada uno de los lados que pasan por el vértice opuesto.

En un triángulo tendremos tres rectas de cada tipo.

Los puntos de intersección de dichas rectas se denominan **puntos notables** y son:

- **Circuncentro:** punto de intersección de las tres mediatrices.

- **Incentro**: punto de intersección de las tres bisectrices.

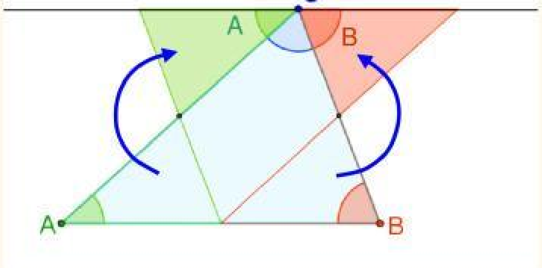
- **Baricentro:** punto de intersección de las tres medianas.

- **Ortocentro:** punto de intersección de las tres alturas.

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?

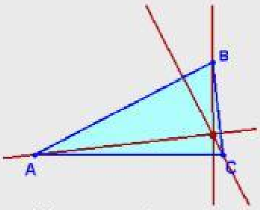
Como puedes apreciar en el dibujo

$$A + B + C = 180º$$

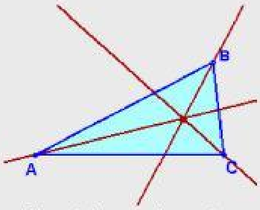


EJERCICIOS resueltos

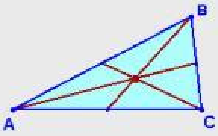
4. Indica las rectas notables y el punto que aparecen representados en cada gráfico:



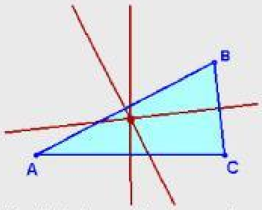
Alturas y ortocentro



Bisectrices e incentro

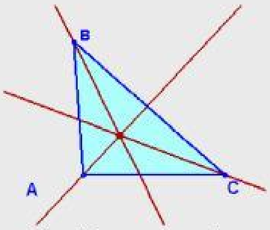


Medianas y baricentro

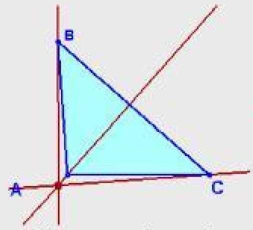


Mediatrices, circuncentro

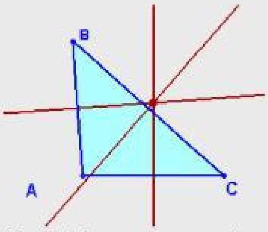
5. Indica las rectas notables y el punto que aparecen representados en cada gráfico:



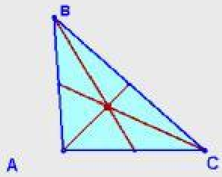
Bisectrices e incentro



Alturas y ortocentro



Mediatrices, circuncentro



Medianas y baricentro

6. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 7 y 8 centímetros. ¿Cómo es el triángulo según sus lados y según sus ángulos? Traza todas las rectas y puntos notables. ¿Dónde están situados los puntos notables?

   El triángulo es escaleno porque los tres lados son distintos y acutángulo porque todos sus ángulos son agudos. Todos los puntos notables están en el interior.

7. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 8 y 10 centímetros. ¿Cómo es el triángulo según sus lados y según sus ángulos? Traza todas las rectas y puntos notables. ¿Dónde están situados los puntos notables?

   El triángulo es escaleno porque los tres lados son distintos y rectángulo porque tiene un ángulo recto. El circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa. El ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto. El baricentro y el incentro están en el interior.

8. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 8 y 12 centímetros. ¿Cómo es el triángulo según sus lados y según sus ángulos? Traza todas las rectas y puntos notables. ¿Dónde están situados los puntos notables?

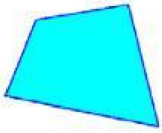
   El triángulo es escaleno porque los tres lados son distintos y obtusángulo porque tiene un ángulo obtuso. El circuncentro y el ortocentro quedan fuera del triángulo. El baricentro y el incentro están en el interior.

9. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 6 y 6 centímetros. ¿Cómo es el triángulo según sus lados y según sus ángulos? Traza todas las rectas y puntos notables. ¿Qué ocurre con las rectas y los puntos notables?

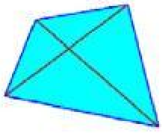
   El triángulo es equilátero y acutángulo, todos los ángulos miden 60º. Las rectas y los puntos notables coinciden.

3. Cuadriláteros

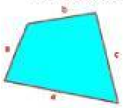
Elementos y clasificación



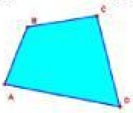
Cuadrilátero



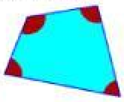
Diagonales



lados



vértices

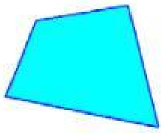


ángulos

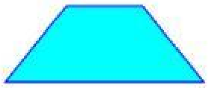
Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados. Sus elementos característicos son: lados, vértices, ángulos y diagonales.

Los triángulos se pueden clasificar según el paralelismo entre sus lados en:

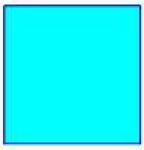
- **Trapezoides:** no tiene lados paralelos.
- **Trapecios:** tiene dos lados paralelos.
- **Paralelogramos**: los lados opuestos son paralelos.

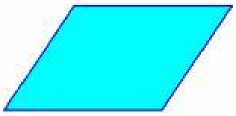


Trapezoide



Trapecio

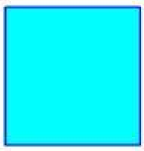




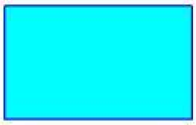
Paralelogramos

> Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados.

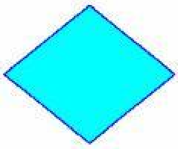
Paralelogramos



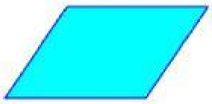
Cuadrado



Rectángulo



Rombo



Romboide

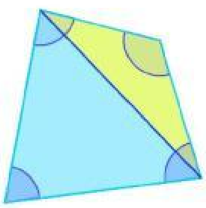
Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos siempre son paralelos, tal como se mostraba en el apartado anterior.

Los paralelogramos se pueden clasificar atendiendo a sus ángulos y a sus lados en:

- **Cuadrados:** sus cuatro lados son iguales y sus cuatro ángulos también.
- **Rectángulos:** sus lados opuestos son iguales y sus cuatro ángulos son iguales.
- **Rombos:** sus cuatro lados son iguales y sus ángulos opuestos son iguales.
- **Romboides:** sus lados opuestos son iguales y sus ángulos opuestos son iguales.

> Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

¿Cuánto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero‘



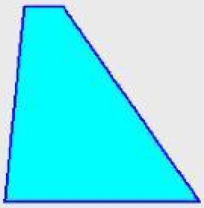
La diagonal lo divide en dos triángulos, la suma de los ángulos del cuadrilátero es:

$$180^{\circ} + 180^{\circ} = \mathbf{360^{\circ}}$$

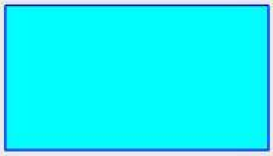
EJERCICIOS resueltos

10. Clasifica los siguientes cuadriláteros:

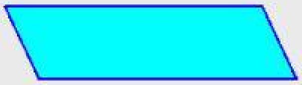
a)



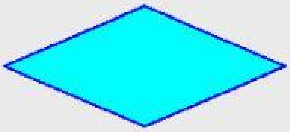
b)



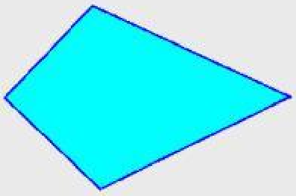
c)



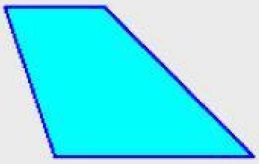
d)



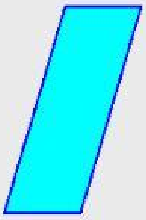
e)



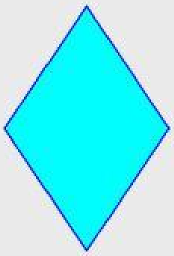
f)



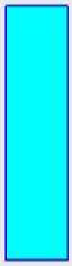
g)



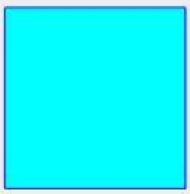
h)



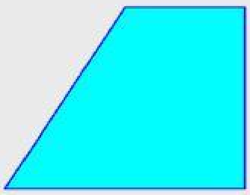
i)



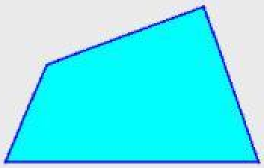
j)



k)



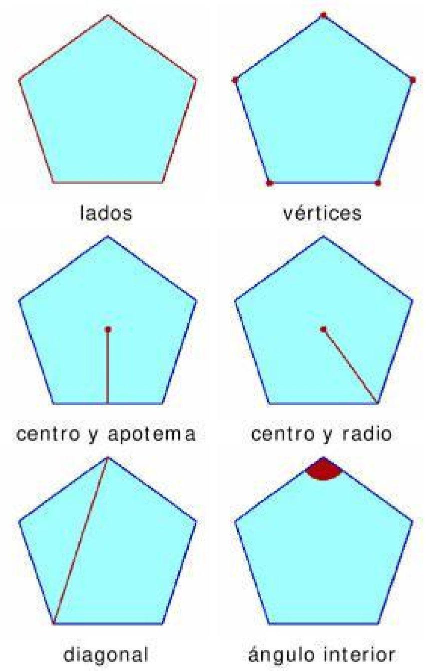
l)



a) Trapecio
b) Rectángulo
c) Romboide
d) Rombo
e) Trapezoide
f) Trapecio
g) Romboide
h) Rombo
i) Rectángulo
j) Cuadrado
k) Trapecio
l) Trapezoide

4. Polígonos regulares

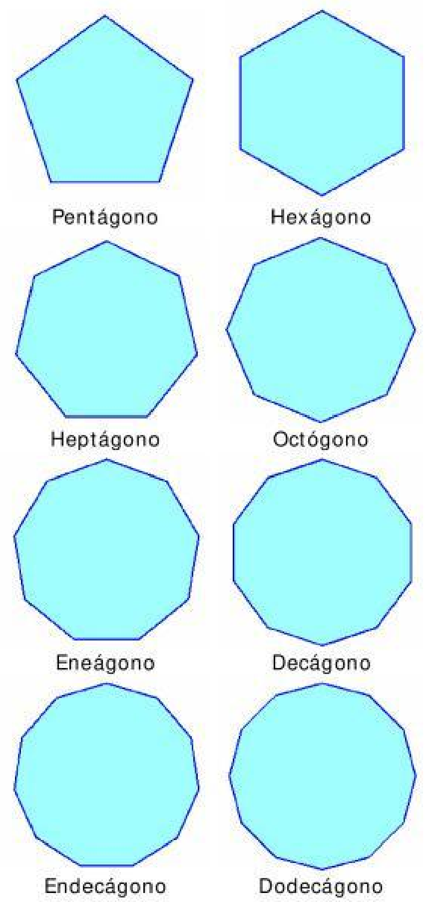
Elementos.



Un **polígono regular** es aquél cuyos lados tienen la misma longitud y cuyos ángulos son iguales

Sus elementos característicos son:

- **Lado**: cada uno de los segmentos de la línea poligonal cerrada.
- **Vértice**: cada uno de los puntos comunes a dos lados consecutivos.
- **Centro**: punto que equidista de todos los vértices.
- **Apotema**: segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cada lado.
- **Radio**: segmento que une el centro del polígono con cada uno de los vértices.
- **Diagonal**: segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.
- **Ángulo interior**: cada uno de los ángulos formados por dos vértices no consecutivos.



Cada polígono regular recibe un nombre según su número de lados:

- De tres lados: triángulo equilátero.
- De cuatro lados: cuadrado.
- De cinco lados: pentágono.
- De seis lados: hexágono.
- De siete lados: heptágono.
- De ocho lados: octógono.
- De nueve lados: eneágono.
- De diez lados: decágono.
- De once lados: endecágono.
- De doce lados: dodecágono.
- De trece o más lados: no se le da ningún nombre, se habla de polígono regular de 13, 14, ..., lados.

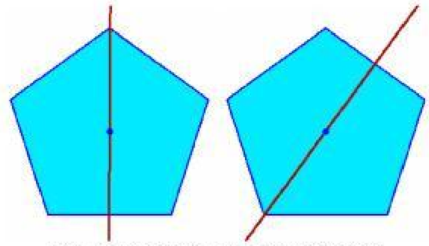
Ejes de simetría

Una línea que cruza una figura geométrica es un **eje de simetría** si la divide en dos partes de manera que si doblamos por dicho eje una de esas partes se superpone coincidiendo totalmente con la otra.

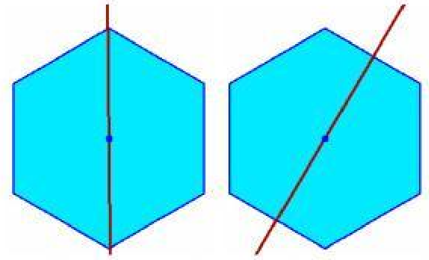
Observa las similitudes y diferencias, respecto a los ejes de simetría, que muestran los polígonos según tengan un **número par o impar de lados**.

Un eje de simetría de un polígono regular con un número impar de lados pasa por cada uno de los vértices y por el punto medio del vértice opuesto.

Un polígono regular con un número par de lados tiene dos tipos de ejes de simetría, uno une dos vértices opuestos y otro, une los puntos medios de dos lados opuestos.



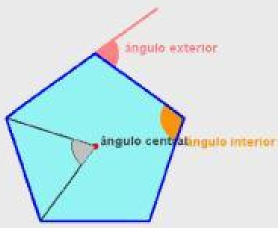
Eje de simetría de un pentágono



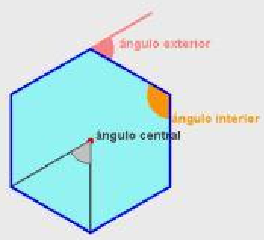
Ejes de simetría de un hexágono

EJERCICIOS resueltos

11. Calcula el valor de los ángulos central, interior y exterior en un pentágono regular y en un exágono regular:

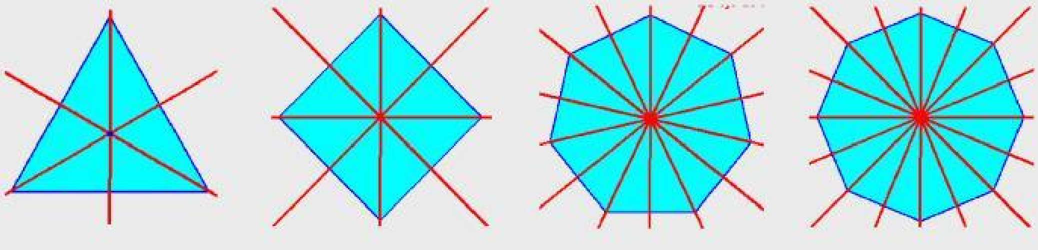


Ángulo central: 360:5=72º
Ángulo interior: 180-72=108º
Ángulo exterior: 180-108=72º

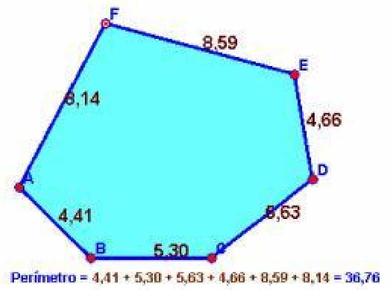


Ángulo central: 360:6=60º
Ángulo interior: 180-60=120º
Ángulo exterior: 180-120=60º

12. Dibuja los ejes de simetría en un triángulo equilátero, un cuadrado, un heptágono regular y un octógono regular:



5. Perímetros y áreas



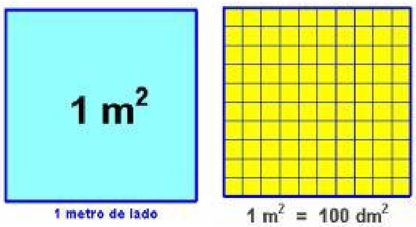
Perímetro de un polígono

Definición. Medir áreas.

El **perímetro** de una figura plana es la **suma de las longitudes de sus lados**.

El **área** de una figura corresponde a la **medida de la superficie que dicha figura ocupa**. El cálculo del área se realiza de forma **indirecta**, es decir, hay que recurrir a diferentes fórmulas matemáticas para conocerla, no podemos medirla como hacemos con las longitudes (con regla podemos "leer" directamente la longitud de un segmento).

Sumando las longitudes de los lados de un polígono hallaremos su **perímetro**. El **área no puede medirse de forma directa**, hay que recurrir a fórmulas indirectas.

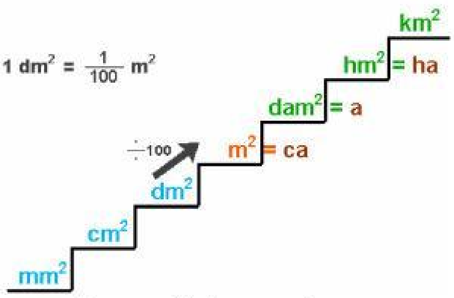


Unidad de superficie

Unidades de superficie

Para medir superficies se toma como unidad la superficie que corresponde a un cuadrado de un metro de lado. A esta unidad se le denomina **metro cuadrado** y se simboliza m^2.

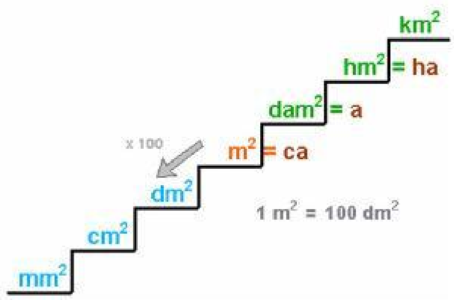
En el gráfico se puede ver que mientras que un metro es igual a diez decímetros, un metro cuadrado equivale a cien centímetros cuadrados. Las unidades de superficie varían de 100 en 100.



Paso a unidades superiores

- Para pasar de una unidad a su inmediatamente posterior deberemos dividir por 100.
- Para pasar de una unidad a su inmediatamente anterior deberemos multiplicar por 100.

La unidad de superficie es el **metro cuadrado (m^2)**.

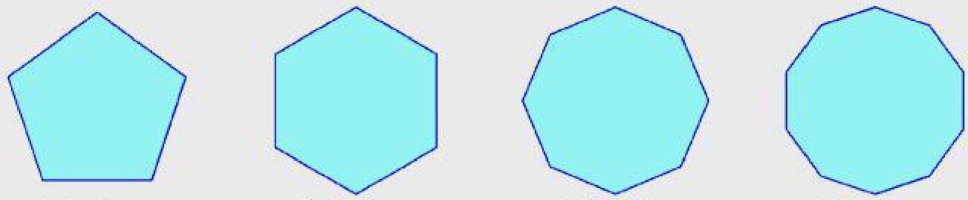


Paso a unidades inferiores

En la medida de la superficie de terrenos se suele utilizar como unidad el **área**, que equivale a un decámetro cuadrado o a cien metros cuadrados.

EJERCICIOS resueltos

13. Calcula el área de los siguientes polígonos regulares expresando el resultado en decámetros, metros, decímetros, centímetros y milímetros:



lado: 5 cm. lado: 8 m. lado: 2 dm. lado: 4 mm.

a) Perímetro del pentágono: 0.025 dam = 0.25 m = 2.5 dm = **25 cm** = 250 mm
b) Perímetro del hexágono: 4.8 dam = **48 m** = 480 dm = 4800 cm = 48000 mm
c) Perímetro del octógono: 0.16 dam = 1.6 m = **16 dm** = 160 cm = 1600 mm
d) Perímetro del decágono: 0.004 dam = 0.04 m = 0.4 dm = 4 cm = **40 mm**

14. ¿Cuántos cm^2 son 40 m^2?

Para pasar de m^2 a cm^2 hay que bajar dos posiciones. Hay que multiplicar dos veces por 100. Equivale a multiplicar por 10000.

$$40 \text{ m}^2 = 40 \cdot 100 \cdot 100 = 40 \cdot 10000 = 400000 \text{ cm}^2.$$

15. ¿Cuántos m^2 son 500 mm^2?

Para pasar de mm^2 a m^2 hay que subir tres posiciones. Hay que dividir tres veces por 100. Equivale a dividir por 1000000

$$500 \text{ mm}^2 = 500 : 100 : 100 : 100 = 500 : 1000000 = 0.0005 \text{ m}^2.$$

16. ¿Cuántos dm^2 son 7 km^2?

Para pasar de km^2 a dm^2 hay que bajar cuatro posiciones. Hay que multiplicar cuatro veces por 100. Equivale a multiplicar por 100000000.

$$7 \text{ km}^2 = 7 \cdot 100000000 = 700000000 \text{ dm}^2.$$

17. ¿Cuántos hm^2 son 24 dam^2?

Para pasar de dam^2 a hm^2 hay que subir una posición. Hay que dividir por 100.

$$24 \text{ dam}^2 = 24 : 100 = 0.24 \text{ hm}^2.$$

18. ¿Cuántos mm^2 son 0.125 hm^2?

Para pasar de hm^2 a mm^2 hay que bajar cinco posiciones. Hay que multiplicar cincos veces por 100. Equivale a multiplicar por 10000000000.

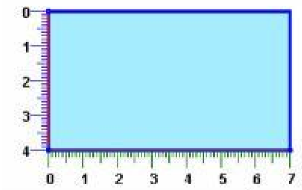
$$0.125 \text{ hm}^2 = 0.125 \cdot 10000000000 = 1250000000 \text{ mm}^2.$$

6. Áreas de polígonos

Áreas de cuadriláteros

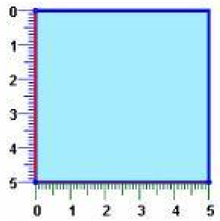
El cálculo del área de un cuadrilátero, en el caso de rectángulos, cuadrados y romboides, es muy sencilla.

> El cálculo del **área de un rectángulo** es básico para entender el cálculo de áreas de otras figuras planas.



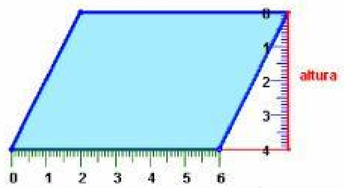
$A = 7 \times 4 = 28\ cm^2$

- **Área de un rectángulo**. Se obtiene multiplicando la base por la altura: A = base x altura.



$A = 5 \times 5 = 25\ cm^2$

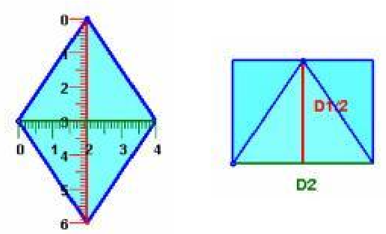
- **Área de un cuadrado**. A = lado x lado = $lado^2$.



$A = 6 \times 4 = 24\ cm^2$

- **Área de un romboide**. Se obtiene a partir del área del rectángulo, multiplicando la base por la altura del romboide (no por el oro lado).

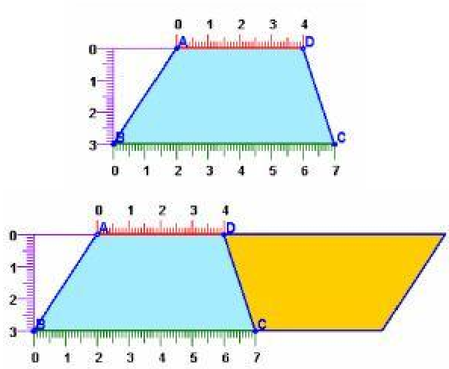
A = base x altura.



$$A = \frac{6 \times 4}{2} = 12\ cm^2$$

- **Área de un rombo**. A partir de un rombo se puede construir un rectángulo como se puede observar en el gráfico de la izquierda. La base coincide con una de las diagonales y la altura con la mitad de la otra:

$$A = \frac{\text{Diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$



$$A = \frac{(7 + 4) \times 3}{2} = 16,5\ cm^2$$

- **Área de un trapecio**. Si se coloca el mismo trapecio invertido como se muestra en la figura de la izquierda, se obtiene un romboide. El área de este romboide es el doble del área del trapecio. La base del romboide es la suma de las bases de los trapecios y la altura del romboide coincide con la altura del trapecio.

$$A = \frac{(\text{Base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$$