



Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan

Kelas/Semester : XI/2

Materi : Jumlah dan Selisih Dua Sudut Sinus dan Cosinus

Kompetensi Dasar

- 3.1 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus.
 - 3.1.1 Menunjukkan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus dari rumus jumlah dua sudut atau rumus selisih dua sudut yang telah di pelajari sebelumnya.
 - 3.1.2 Menyederhana dari bentuk yang memuat penjumlahan atau selisih sinus atau kosinus.
 - 3.1.3 Menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus atau cosinus.
- 4.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus.
 - 4.1.1 Menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus.

Tujuan Pembelajaran

Pembelajaran ini di susun agar siswa mampu:

1. Menunjukkan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus dari rumus jumlah dua sudut atau rumus selisih dua sudut yang telah di pelajari sebelumnya.
2. Mengaplikasikan rumus yang telah di peroleh dalam menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan jumlah dan selisih sinus dan cosinus.
3. Mengimplementasikan beberapa rumus dalam menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan jumlah dan selisih sinus dan cosinus.

Apersepsi

Sebelum kita membahas tentang jumlah dan selisih sinus dan cosinus, terlebih dahulu kita harus mengetahui rumus perkalian sinus dan cosinus dua sudut. Mengapa kita harus menguasai perkalian sinus dan cosinus terlebih dahulu? Karna untuk menemukan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus kita akan membutuhkan rumus perkalian sinus dan cosinus. Perhatikan video berikut.

Materi

Di pembelajaran sebelumnya kita sudah mempelajari rumus sinus dan cosinus jumlah dan selisih dua sudut sebagai berikut.

Sinus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Cosinus

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Dengan menggunakan rumus-rumus di atas, kita dapat menentukan rumus perkalian sinus dan cosinus dengan cara eliminasi.

Perkalian Sinus Cosinus

Sinus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta +$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta -$$

Cosinus

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta +$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta -$$

Sehingga kita peroleh rumus untuk perkalian sinus dan cosinus sebagai berikut.

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

Contoh Soal

1. Sederhanakan bentuk berikut

$$\cos(100^\circ + x) \cos(10^\circ - x) + \sin(100^\circ + x) \sin(10^\circ - x)$$

Jawab :

$$\cos((100^\circ + x) - (10^\circ - x))$$

$$\cos(100^\circ + x - 10^\circ - x)$$

$$\cos(90^\circ + 2x)$$

$$= \sin 2x$$

2. Tentukan nilai $\cos 105^\circ$

Jawab :

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{4} \sqrt{6}$$

$$= \frac{1}{4} (\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

3. Sederhanakan $\sin 315^\circ - \sin 15^\circ$

Jawab :

$$2 \cos \frac{1}{2} (315^\circ + 15^\circ) \sin \frac{1}{2} (315^\circ - 15^\circ)$$

$$2 \cos 165^\circ \sin 150^\circ$$

$$2 \cos 165^\circ \times \frac{1}{2}$$

$$\cos 165^\circ$$

Jumlah dan Selisih Sinus Cosinus

Berdasarkan rumus perkalian sinus dan cosinus, diperoleh hubungan penjumlahan dan pengurangan dalam sinus dan cosinus yaitu sebagai berikut.

Misalkan :

$\begin{aligned} A + B &= \alpha \\ A - B &= \beta \\ \frac{2A = \alpha + \beta}{A} &+ \\ A &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \end{aligned}$	$\begin{aligned} A + B &= \alpha \\ A - B &= \beta \\ \frac{2B = \alpha - \beta}{B} &- \\ B &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{aligned}$
---	---

Kemudian kita substitusikan persamaan tersebut pada rumus perkalian sinus dan cosinus sehingga didapatkan rumus berikut.

$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$
$2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$
$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$
$2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \sin \alpha - \sin \beta$
$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$
$2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$
$-2 \sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$
$-2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta$