

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAÍCAS: LINEALES, CUADRÁTICOS DE ORDEN SUPERIOR, RACIONALES

FÓRMULA: $f(x) = mx + n$

EJERCICIOS RESUELTOS

INTEGRACIÓN DE FUNCIÓN LINEAL

1.- $y = -\frac{3}{4}x - 1$

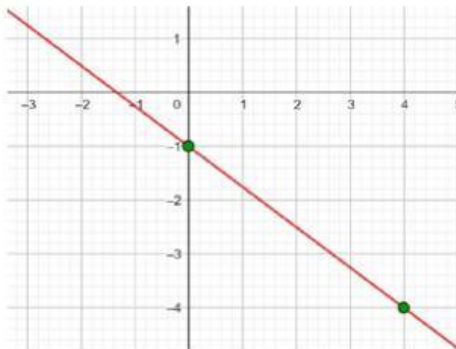
Representa la función afín:

$$y = -\frac{3}{4}x - 1$$

Para poder graficar de una forma eficiente, elaboramos una tabla donde a la izquierda colocaremos los valores de x (cualquiera que nosotros queramos) y del lado derecho el valor que toma y , después de evaluar el valor asignado a x en nuestra función.

x	$y = -\frac{3}{4}x - 1$
0	-1
4	-4

height



INTEGRACIÓN DE FUNCIÓN CUADRÁTICAS DE ORDEN SUPERIOR

2.- $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$

Tomamos los divisores del término independiente: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.

$$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 + 6 = 0$$

Dividimos por **Ruffini** (División sintética).

2	1	-8	-1	6	
1	2	3	-5	-6	
2	3	-5	-6	0	

Por ser la división exacta, $D = d \cdot c$.

$$(x-1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = 0$$

Una raíz es $x = 1$

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5x - 6 \neq 0$$

Probamos con $x = -1$.

$$P(-1)=2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$$

$$\begin{array}{r} -1 \quad \quad 2 \quad \quad 3 \quad \quad -5 \quad \quad -6 \\ \quad \quad \quad -2 \quad \quad -1 \quad \quad 6 \\ \hline \quad \quad 2 \quad \quad 1 \quad \quad -6 \quad \quad 0 \end{array}$$

$$(x-1) \cdot (x+1) \cdot (2x^2 + x - 6) = 0$$

Otra raíz es $x=-1$

Como el tercer polinomio ya es de segundo grado, podemos factorizarlo:

$$(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (2x-3) = 0$$

Las soluciones son: $x=1, x=-1, x=-2$ y $x=\frac{3}{2}$

$$3.- \quad x^4 + 12x^3 - 64x^2 = 0$$

Sacamos factor común x^2

$$x^2(x^2 + 12x - 64) = 0$$

Como tenemos un producto igualado a cero o un factor es cero o el otro factor es cero o los dos son cero

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

Factorizamos el segundo polinomio, que es de segundo grado

$$x^2(x - 4)(x + 16) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -16$$

$$4.- \quad \int \frac{5x + 3}{x^2 + 4} dx$$

Separamos los términos del numerador, cada uno con el denominador común y aplicamos la propiedad de la integral para sumas

$$\int \frac{5x + 3}{x^2 + 4} dx = \int \left(\frac{5x}{x^2 + 4} + \frac{3}{x^2 + 4} \right) dx$$

Integramos cada una de las integrales obtenidas, para esto empleamos las fórmulas

$$\int \frac{u' dx}{u} = \ln u + C, \quad \int \frac{u' dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x}{x^2 + 4} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx \\ &= \frac{5}{2} \ln(x^2 + 4) + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x^2+4} dx &= 3 \int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + C\end{aligned}$$

Así, el resultado de la integral es

$$\int \frac{5x+3}{x^2+4} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2+4) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

5.-
$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2} dx$$

Expresamos el cociente en la forma $\frac{p}{q} = c + \frac{r}{q}$, donde c es el cociente y r es el resto

$$\frac{3x^3+5x}{x^2-x-2} = 3x+3 + \frac{14x+6}{x^2-x-2}$$

Escribimos la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3 + 5x}{x^2 - x - 2} dx &= \int \left(3x + 3 + \frac{14x + 6}{x^2 - x - 2} \right) dx \\ &= \int (3x + 3) dx + \int \frac{14x + 6}{x^2 - x - 2} dx\end{aligned}$$

Resolvemos la primera integral

$$\int (3x + 3) dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + C$$

Resolvemos la segunda integral por fracciones parciales

$$\frac{14x + 6}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

Se efectúa la suma:

$$\frac{14x + 6}{x^2 - x - 2} = \frac{A(x + 1) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)}$$

Como las dos fracciones tienen el mismo denominador, los numeradores han de ser iguales:

$$14x + 6 = A(x + 1) + B(x - 2)$$

Para calcular los valores de A, B, damos a X los valores que anulan al denominador y otro más

$$x = -1 \implies -8 = -3B \implies B = \frac{8}{3}$$

$$x = 2 \implies 34 = 3A \implies A = \frac{34}{3}$$

Se calculan las integrales de las fracciones simples:

$$\begin{aligned} \int \frac{14x+6}{x^2-x-2} dx &= \frac{34}{3} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{8}{3} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{34}{3} \ln(x-2) + \frac{8}{3} \ln(x+1) + C \end{aligned}$$

Así, el resultado de la integral es

$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2} dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{34}{3} \ln(x-2) + \frac{8}{3} \ln(x+1) + C$$

Realiza los siguientes ejercicios según los ejemplos anteriores.

1.-
$$\int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

2.-
$$\int \frac{3x^2 + 1}{(x + 2)^3} dx$$

3.-
$$\int \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^3 + x} dx$$