INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAÍCAS: LINEALES, CUADRÁTICOS DE ORDEN SUPERIOR, RACIONALES

FÓRMULA: $f(x) = mx + n$

EJERCICIOS RESUELTOS

INTEGRACIÓN DE FUNCIÓN LÍNEAL

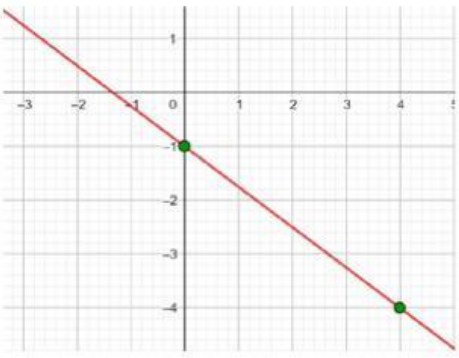
1.- $$y = -\frac{3}{4}x - 1$$

Representa la función afín:

$$y = -\frac{3}{4}x - 1$$

Para poder graficar de una forma eficiente, elaboramos una tabla donde a la izquierda colocaremos los valores de x (cualquiera que nosotros queramos) y del lado derecho el valor que toma y, después de evaluar el valor asignado a x en nuestra función.

x	$y = -\frac{3}{4}x - 1$
0	-1
4	-4
height	



LIVEWORKSHEETS

INTEGRACIÓN DE FUNCIÓN CUADRÁTICAS DE ORDEN SUPERIOR

2.- $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$

Tomamos los divisores del término independiente: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.

$$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 + 6 = 0$$

Dividimos por **Ruffini** (División sintética).

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

Por ser la división exacta, $D = d \cdot c$.

$$(x-1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = 0$$

Una raíz es $x = 1$

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5x - 6 \neq 0$$

Probamos con $x = -1$.

LIVEWORKSHEETS

$$P(-1)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=-2+3+5-6=0$$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(2x^2+x-6)=0$$

Otra raíz es $x=-1$

Como el tercer polinomio ya es de segundo grado, podemos factorizarlo:

$$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(2x-3)=0$$

Las soluciones son: $x=1, x=-1, x=-2$ y $x=\frac{3}{2}$

3.- $x^4+12x^3-64x^2=0$

Sacamos factor común x^2

$$x^2(x^2+12x-64)=0$$

Como tenemos un producto igualado a cero o un factor es cero o el otro factor es cero o los dos son cero

LIVEWORKSHEETS

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

Factorizamos el segundo polinomio, que es de segundo grado

$$x^2(x-4)(x+16) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -16$$

4.- $$\int \frac{5x+3}{x^2+4}dx$$

Separamos los términos del numerador, cada uno con el denominador común y aplicamos la propiedad de la integral para sumas

$$\int \frac{5x+3}{x^2+4}dx = \int \left(\frac{5x}{x^2+4} + \frac{3}{x^2+4}\right) dx$$

Integramos cada una de las integrales obtenidas, para esto empleamos las fórmulas

$$\int \frac{u'dx}{u} = \ln u + C, \qquad \int \frac{u'dx}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{5x}{x^2+4}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx$$

$$= \frac{5}{2}\ln(x^2+4) + C,$$

LIVEWORKSHEETS

$$\int \frac{3}{x^2+4}dx = 3\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{3}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

Así, el resultado de la integral es

$$\int \frac{5x+3}{x^2+4}dx = \frac{5}{2}\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

5.- $$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx$$

Expresamos el cociente en la forma $\frac{p}{q} = c + \frac{r}{q}$, donde c es el cociente y r es el resto

$$\frac{3x^3+5x}{x^2-x-2} = 3x+3+\frac{14x+6}{x^2-x-2}$$

Escribimos la integral

LIVEWORKSHEETS

$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx = \int \left(3x+3+\frac{14x+6}{x^2-x-2}\right) dx$$

$$= \int (3x+3)\,dx + \int \frac{14x+6}{x^2-x-2}dx$$

Resolvemos la primera integral

$$\int (3x+3)\,dx = \frac{3x^2}{2}+3x+C$$

Resolvemos la segunda integral por fracciones parciales

$$\frac{14x+6}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

Se efectúa la suma:

$$\frac{14x+6}{x^2-x-2} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Como las dos fracciones tienen el mismo denominador, los numeradores han de ser iguales:

$$14x + 6 = A(x+1) + B(x - 2)$$

LIVEWORKSHEETS

Para calcular los valores de A, B, damos a x los valores que anulan al denominador y otro más

$$x = -1 \implies -8 = -3B \implies B = \frac{8}{3}$$

$$x = 2 \implies 34 = 3A \implies A = \frac{34}{3}$$

Se calculan las integrales de las fracciones simples:

$$\begin{aligned} \int \frac{14x+6}{x^2-x-2}dx &= \frac{34}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{34}{3}\ln(x-2) + \frac{8}{3}\ln(x+1) + C \end{aligned}$$

Así, el resultado de la integral es

$$\int \frac{3x^3+5x}{x^2-x-2}dx = \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{34}{3}\ln(x-2) + \frac{8}{3}\ln(x+1) + C$$

LIVEWORKSHEETS

Realiza los siguientes ejercicios según los ejemplos anteriores.

1.- $$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$$

2.- $$\int \frac{3x^2+1}{(x+2)^3}dx$$

3.- $$\int \frac{2x^2-3x+2}{x^3+x}dx$$

LIVEWORKSHEETS