



“INTEGRAL INDIFINIDA”

BACHILLERATO GENERAL OFICIAL:
DAVID ALFARO SIQUEIROS

ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL

NOMBRE DEL DOCENTE: MTRO.
ABISAI ORDUÑA MARTÍNEZ

NOMBRE DEL ALUMNO: SHARON
JOCELYN FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ,
TERESA CORTES PÉREZ

GRADO: 1 GRUPO: “A”

SEMESTRE: QUINTO

BLOQUE: 1

Integral indefinida

Integrar es el proceso inverso del de derivar. Esto significa que dada una función $f(x)$, se buscan aquellas funciones $f(x)$ que al ser derivadas conducen a $f(x)$. Se dice, entonces, que $f(x)$ es una primitiva o antiderivada de $f(x)$. Dicho de otro modo, las primitivas de $f(x)$ son las funciones derivables $f(x)$ tales que:

$$F'(x) = f(x)$$

La *integral indefinida* es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.

Mientras que la derivada de una función, cuando existe, es única, no es el caso de la primitiva, pues si $f(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también lo es $f(x)+c$, donde c es cualquier constante real.

Para encontrar una primitiva de una función dada, basta con aplicar la o las integrales que se obtienen de tablas.

Ejemplo de integral indefinida

Si tenemos la función $(x)=12x^5$, ¿cuál es su integral indefinida?

Incrementamos el exponente de x por 1

Dividimos la expresión por el nuevo exponente

Sumamos la constante de integración

Entonces tenemos:

$$\int 12x^5 dx = 612x^6 + c$$

$$\int 12x^5 dx = 2x^6 + c$$

Integral logarítmica

Función logarítmica es una función cuya expresión $f(x) = \log_a x$ es $a > 0$ $a \neq 1$

Las **fórmulas para resolver integrales logarítmicas** son las siguientes:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

$$\int \log_a(x) dx = \frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln(x) - 1) + C$$

Las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas son inversas entre sí, es decir, son simétricas con respecto de la función identidad $f(x) = x$.

Ejemplos:

Ejercicio 1: $\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx$

Para resolver la siguiente integral haremos un cambio de variable $u = x^3 + 8$ $du = 3x^2$ y posteriormente resolvemos la integral

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 8) + C$$

Ejercicio 2: $\int \cot x dx$

Para resolver utilizaremos la definición $\cot x = \cos x \frac{1}{\sin x}$ luego hacemos un cambio de variable $u = \sin x$ $du = \cos x$ luego resolvemos la integral

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln \sin x + C$$

Ejercicio 3: $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$

Resolver la siguiente integral utilizamos la definición $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ y luego hacemos un cambio de variable $u = 1 + \sin^2 x$ $du = 2 \sin x \cos x$ luego resolvemos la integral

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \ln(1 + \sin^2 x) + C$$

Ejercicio 4: $\int \operatorname{tg} 5x dx$

Para poder resolver la siguiente integral utilizamos la definición $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y luego hacemos un cambio de variable $u = \cos 5x \quad du = -5 \operatorname{sen} 5x$

luego resolvemos la integral $\int \operatorname{tg} 5x dx = \int \frac{\operatorname{sen} 5x}{\cos 5x} dx = -\frac{1}{5} \ln(\cos 5x) + C$

Ejercicio 5: $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$

Utilizamos la definición $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y luego hacemos un cambio de variable $u = \operatorname{sen} x \quad du = \cos x$

Luego resolvemos la integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln(\operatorname{sen} x) + C$$

Ejercicios a resolver

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$$

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2} dx$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}$$

Integrales exponenciales

Es una función especial definida en el plano complejo, se utilizan para modelar el crecimiento o decrecimiento a través del tiempo ya sea de una población de individuos, los intereses generados por un capital en el banco etc.

La fórmula para la integral de una función exponencial $\int u' e^u du = e^u + C$ base e es Se pasa la exponencial original, **siempre y cuando esté completa la derivada original del exponente (dx).**

Ejemplos:

Ejemplo 1: Integra la siguiente función $\int 5e^{5x} dx$

Primero se hace la derivada del exponente.

Verifica que la derivada esté en la función original, si le falta algún número se le agrega de la siguiente forma:

$$u = 5x$$

$$u' = 5$$

Aplica la fórmula, quedando:

$$\int u' e^u du = e^u + C$$

$$u = 5x$$

$$u' = 5$$

En esta ocasión el 5 sí está en la función, se dice que la función está completa.

$$e^{5x} + C$$

Ejercicio 2: $\int e^{2x+2} dx$

Observamos que la base del exponencial es e Así mismo tenemos que $u(x) = 2x + 2$

Como $u'(x) = 2$ entonces necesitamos multiplicar al diferencial por dos

$$\int e^{2x+2} dx = \int e^{2x+2} \cdot \frac{2}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x+2} \cdot 2 dx$$

Con esto ya podemos calcular la integral

$$\int e^{2x+2} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x+2} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} e^{2x+2} + C$$

Ejercicio 3: $\int 5^x dx$

Ahora observemos que la base es 5. Además, el argumento de la exponencial es simplemente X por lo tanto, podemos utilizar la formula directamente con a = 5

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

Ejercicio 4: $\int 2^x 5^x dx$

Recordemos que $a^c b^c = (ab)^c$ ya tiene el mismo exponente. Por lo tanto, la integral se calcula como

$$\int 2^x 5^x dx = \int (2 \cdot 5)^x dx = \int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$$

Ejercicio 5: $\int 8^{3x+1} dx$

Notamos que $a = 8$ y que $u(x) = 3x + 1$ así tenemos que $u'(x) = 3$ por lo que tenemos que multiplicar el diferencial por 3 (al mismo tiempo hay que dividir por 3 para que la función siga siendo la misma): $\int 8^{3x+1} dx = \int 8^{3x+1} \cdot \frac{3}{3} dx = \frac{1}{3} \int 8^{3x+1} 3 dx$

Por lo tanto, la integral es

$$\begin{aligned} \int 8^{3x+1} dx &= \frac{1}{3} \int 8^{3x+1} 3 dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{8^{3x+1}}{\ln 8} + C \\ &= \frac{8^{3x+1}}{3 \ln 8} + C \end{aligned}$$

Ejercicios a resolver

Determina la siguiente integral

$$\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\int e^{\sin x} \cos x dx$$

$$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Integrales por sustitución o cambio de variable

El método **integración por sustitución** o **cambio de variable** se utiliza para evaluar integrales. El método se basa en realizar de manera adecuada un cambio de variable que permita convertir el integrando en algo sencillo. Este método realiza lo opuesto a la regla de la cadena.

El **método de integración por sustitución** o **cambio de variable** se basa en la derivada de la función compuesta

$$\int f'(u) \cdot u' dx = F(u) + C$$

Ejemplos:

Ejercicio 1:

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$x = \sin t$$

$$dx = \cos t dt$$

Sustituimos en la integral y para simplificar empleamos identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} &= \int \frac{\sin^4 t}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} \cos t dt \\ &= \int \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1-2\cos^2 t + \cos^4 t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2 \int dt + \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2 \int dt + \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2 \int dt + \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt &= \tan t - 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C \\ &= \tan t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{3}{4}t + C\end{aligned}$$

Regresamos a la variable inicial, para ello despejamos t en el cambio de variable inicial

$$x = \sin t \implies t = \arcsin x$$

Calculamos para el seno y el coseno de t

$$\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Así el resultado se expresa en la variable x como

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^2}} dx = \tan(\arcsin x) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{3}{2} \arcsin x + C$$

Ejercicio 2:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$\tan x = t \implies x = \arctan t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+1+t^2}{1+t^2}} \\
 &= \int \frac{dt}{2+t^2} \\
 &= \int \frac{dt}{2\left[1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt
 \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

Regresamos a la variable inicial

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan x \right) + C$$

Ejercicio 3:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}}$$

Se realiza el cambio de variable y se calcula su diferencial

$$\tan \frac{x}{2} = t \implies x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}} \\
 &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{(1-t^2)(1+t^2) + (1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}} \\
 &= 2 \int \frac{dt}{\sqrt{2-2t^2}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}
 \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \arcsin t + C$$

Regresamos a la variable inicial

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}} = \sqrt{2} \arcsin \left(\tan \frac{x}{2} \right) + C$$

Ejercicio 4:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Se realiza el cambio de variable y se calcula su diferencial

$$x = t^6 \implies t = \sqrt[6]{x}$$

$$dx = 6t^5 dt$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1 - t^3}{t^2} \cdot 6t^5 dt \\
 &= 6 \int (1 - t^3) \cdot t^3 dt \\
 &= 6 \int (t^3 - t^6) dt
 \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$6 \int (t^3 - t^6) dt = \frac{3}{2} t^4 - \frac{6}{7} t^7 + C$$

Regresamos a la variable inicial

$$\frac{3}{2} t^4 - \frac{6}{7} t^7 + C = \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + C$$

Así, la solución en termino de la variable es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}} = \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + C$$

Ejercicio 5:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx$$

Realizamos el cambio de variable

$$\sqrt[3]{1+2x} = t \implies 1+2x = t^3 \implies x = \frac{t^3 - 1}{2}$$

Calculamos la diferencial

$$2 dx = 3t^2 dt \implies dx = \frac{3t^2 dt}{2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos el integrando

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx &= \int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int \left(\frac{t^6-2t^3+1}{4}\right) \cdot t dt \\
 &= \frac{3}{8} \int (t^7 - 2t^4 + t) dt
 \end{aligned}$$

Resolvemos la nueva integral

$$\frac{3}{8} \int (t^7 - 2t^4 + t) dt = \frac{3}{8} \left(\frac{t^8}{8} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) + C$$

Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t = \sqrt[3]{1+2x}$

$$\frac{3}{8} \left(\frac{t^8}{8} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) + C = \frac{3}{64} (\sqrt[3]{1+2x})^8 - \frac{3}{20} (\sqrt[3]{1+2x})^5 + \frac{3}{16} (\sqrt[3]{1+2x})^2 + C$$

Así la solución buscada es

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx = \frac{3}{64} (\sqrt[3]{1+2x})^8 - \frac{3}{20} (\sqrt[3]{1+2x})^5 + \frac{3}{16} (\sqrt[3]{1+2x})^2 + C$$

Ejercicios a resolver

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$$