# Módulo 2

## Avanzando sobre grandes sistemas numéricos

### ¿Qué vas a aprender?

Supongamos que dos niños se encuentran tres naranjas. ¿Cómo harían los niños para repartirlas equitativamente? Situaciones como esta, imponen la necesidad de un conjunto donde sea posible realizar operaciones como $3 \div 2$. A este conjunto se le denomina números racionales $\mathbb{Q}$ en el cual todos los elementos se pueden expresar como la razón de números enteros.

Durante mucho tiempo se creyó que cualquier cantidad se podía expresar como un número racional $\frac{p}{q}$ llamándose *lo conmensurable*, puesto que era posible encontrar una unidad que midiera exactamente a la otra, pero se encontraron situaciones en las cuales las cantidades no podían ser expresadas de esta forma. Por ejemplo no se pudo encontrar un par de números enteros p y q y tales que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. A estos números se les denominó Irracionales $\mathbb{I}$, porque no pueden ser expresados como la razón de dos números enteros, a esto se le llamó *inconmensurabilidad*, es decir no se encontraba una unidad que permitiera dividir exactamente a esta.

La unión de los números racionales e irracionales conforman el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

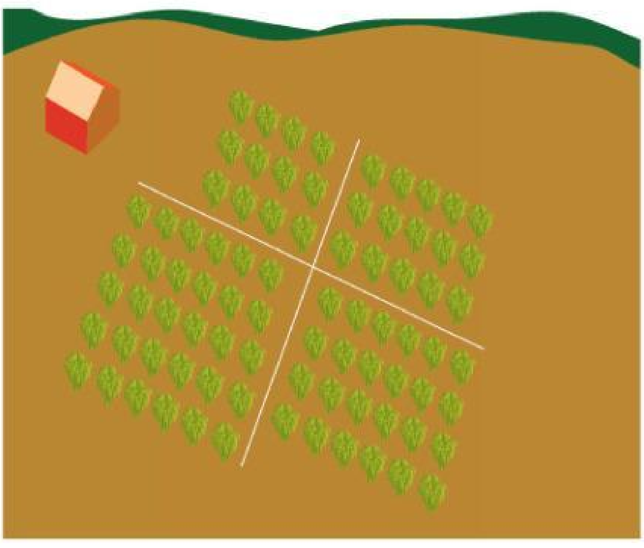
En el presente módulo desarrollarás los conceptos relacionados con las operaciones suma, resta, multiplicación y división de los números racionales y e irracionales, así como las propiedades de tales operaciones dentro de cada uno de estos conjuntos.

# Estándares básicos de competencias

## Pensamiento numérico

- Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Utilizo números Racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medidas.
- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.

# Explora tus conocimientos



Un caficultor tiene una finca de 2.472 $m^2$, separada en cuatro parcelas para sembrar diferentes variedades de café de acuerdo con la siguiente distribución:

Con café arábigo $\frac{1}{9}$ del terreno; con café Borbón, $\frac{5}{12}$; con café caturra, $\frac{1}{4}$ y el resto con variedad Colombia.

- ¿Cuántos $m^2$ no están sembrados de variedad Colombia?
- ¿Cuántos $m^2$ están sembrados de cada variedad de café?

# Guía 4

## Un nuevo conjunto numérico

### Lo que sabemos

Cuando se habla de un cuarto de hora, de la mitad de una torta o de las dos terceras partes de un depósito de gasolina, se hace referencia a las partes iguales en que se puede dividir un total. Estos ejemplos hacen evidente que el uso de las fracciones en la vida cotidiana es más común de lo que se cree. Pero el uso de las fracciones en determinados contextos da su potencialidad en las situaciones de diferentes ciencias como de la cotidianidad. En matemáticas, los fraccionarios dan los cimientos para construir un nuevo conjunto numérico denominado números racionales.

### Aprendamos algo nuevo

Si en el curso de Juliana hay 36 estudiantes, y doce de ellos son hombres, la parte del total que representan se puede escribir como la **fracción** $\frac{12}{36}$.

En la fracción $\frac{a}{b}$ anterior, 12 es el **numerador** y 36 es el **denominador**.

## Una fracción $\frac{a}{b}$ es el cociente indicado de dos números naturales en el que el divisor nunca va a ser cero.

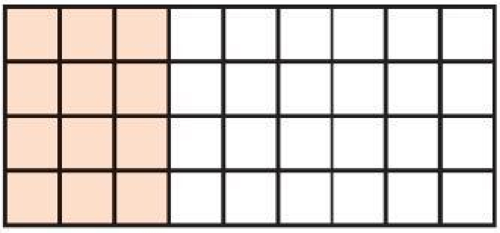
$\frac{a}{b}$

- $a$ ← **Numerador:** número de partes que se toman.
- $b$ ← **Denominador:** número de partes en que se divide la unidad.

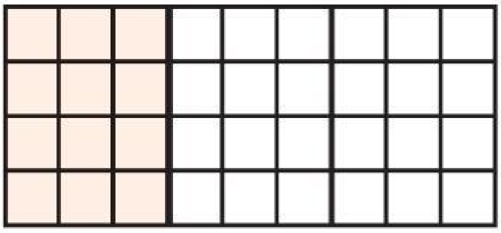
Juliana, afirma que la cantidad de hombres corresponde a $\frac{1}{3}$ del total de estudiantes del curso. ¿Es cierta esta afirmación? ¿SI o NO?

- Para responder la pregunta anterior, copien las cuadrículas de la siguiente figura, y discutan acerca de la representación de las fracciones $\frac{12}{36}$ y $\frac{1}{3}$.

**Fracciones equivalentes**



$\frac{12}{36}$



$\frac{1}{3}$

- Estas fracciones están representando la misma parte sombreada con respecto a la totalidad.

Si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan la misma parte con respecto a la totalidad, se dice que son **fracciones equivalentes**. La equivalencia de fracciones se verifica cuando el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Extremo → $a$, Medio → $b$, Medio → $c$, Extremo → $d$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$

A continuación se muestran parejas de fracciones. Estudien si son equivalentes o no.

$$\frac{8}{6} \text{ y } \frac{4}{3} \qquad \frac{10}{12} \text{ y } \frac{15}{18} \qquad \frac{21}{30} \text{ y } \frac{9}{10} \qquad \frac{14}{3} \text{ y } \frac{21}{9}$$

1. Martín, un compañero de Juliana, dice que el número de mujeres del curso representan $\frac{2}{3}$ del total de los estudiantes. Es cierta esta afirmación. ¿Por qué?

- Si en el curso hay 36 estudiantes y 12 de ellos son hombres, entonces hay 24 mujeres. Por lo tanto, la fracción del total del curso que corresponde a las mujeres es $\frac{24}{36}$.
- Dividan el numerador y el denominador de $\frac{24}{36}$ por un divisor común a los dos términos. ¿Cuál es ese número y cómo queda la nueva fracción?
- Copien y completen la siguiente secuencia. Escriban en los interrogantes los resultados que van obteniendo de cada división.

$$\frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{?}{?} = \frac{? \div 2}{? \div 2} = \frac{?}{?} = \frac{? \div 3}{? \div 3} = \frac{?}{?}$$

$$\frac{24}{36} = \frac{?}{?} = \frac{?}{?} = \frac{?}{?}$$

**Se pueden obtener fracciones equivalentes a una dada multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número. (Este método es conocido como amplificación).**

**O, dividiendo el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número. (Este método es conocido como simplificación).**

| Amplificando | Simplificando |
|---|---|
| $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$ | $\frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$ |
| Fracciones equivalentes | Fracciones equivalentes |

Cuando una fracción no se puede simplificar más se dice que se obtiene una fracción **irreducible**.

Por ejemplo:

$$\frac{18}{24}=\frac{18 \div 2}{24 \div 2}=\frac{9}{12}=\frac{9 \div 3}{12 \div 3}=\frac{3}{4} \leftarrow \text{Fracción irreducible}$$

2. Calculen tres fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ ¿Pueden encontrar más?

**Una fracción y todas las fracciones equivalentes a ella determinan un conjunto denominado clase y el número que representa la clase es la fracción irreducible. Cada representante de la clase es conocido como número racional.**

Si se extiende este conjunto a numeradores y denominadores que pertenecen a los enteros. Se tendría que $\frac{1}{3}$ también representa al siguiente conjunto de fracciones equivalentes que tienen tanto el numerador como el denominador números enteros negativos.

$$\frac{1}{3}=\frac{-3}{-3},\ \frac{-2}{-6},\ \frac{-3}{-9},\ \frac{-4}{-12},\ \frac{-5}{-15},\ \frac{-6}{-18},\ \frac{-7}{-21},\ \frac{-8}{-24},\ \frac{-9}{-27},\ldots$$

Como toda fracción a su vez representa una división; y como ya sabemos que la división entre enteros negativos el cociente es un entero positivo; esta regla se traslada a las fracciones. Por esa razón, decimos que son la misma fracción.

Observa los siguientes ejemplos:

$$\frac{1}{3}=\frac{-1}{-3} \qquad \frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}$$

Para ello, se tiene que los conjuntos de clase sean:

$$-\frac{2}{5}=\frac{-2}{5},\ \frac{-4}{10},\ \frac{-6}{15},\ \frac{-8}{20},\ \frac{-10}{25}, \quad \text{o} \quad -\frac{2}{5}=\frac{2}{-5},\frac{4}{-10},\frac{6}{-15},\frac{8}{-20},\frac{10}{-25}$$

- Encuentren el conjunto de fracciones equivalentes que determinan de qué clase es el número racional $-\frac{7}{5}$.
- El número racional $-\frac{3}{7}$ es el representante de clase de un conjunto de fracciones equivalentes. Escriban el conjunto de fracciones equivalentes.

En general, todos los números racionales se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$ siendo $a$ y $b$ números enteros y $b$ es diferente de cero.

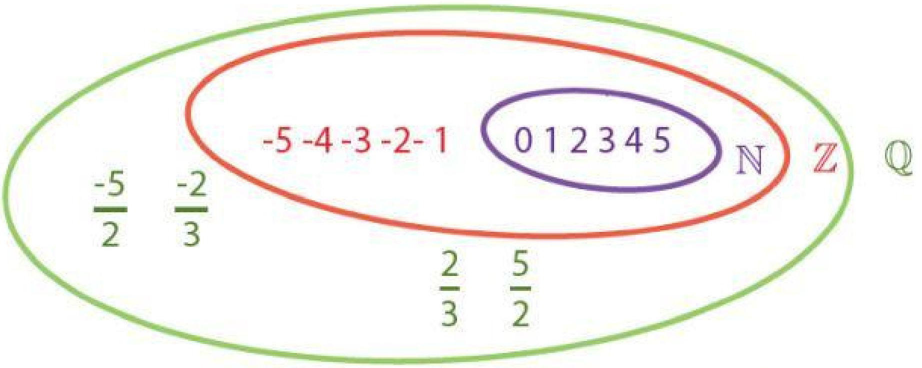
Por lo tanto, algunos ejemplos de números racionales son los siguientes:

$$4, \frac{5}{14}, -9, \frac{7}{4}, 0, 10, \text{ y } \frac{3}{5}$$

El conjunto de los números racionales se denota por el símbolo **Q**.

El conjunto que resulta de unir todas las clases de los conjuntos de las fracciones equivalentes que determinan los números racionales es el **conjunto de los números racionales**. Ver el diagrama a continuación.

**Diagrama representativo de conjuntos de números**




## Representación de los números racionales en la recta numérica

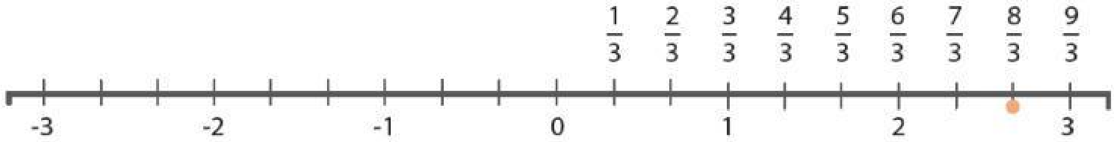
Sigan este proceso para representar un número racional en la recta numérica.

- Tracen una recta horizontal y ubiquen el punto correspondiente a 0 y determinen la ubicación de números enteros positivos y enteros negativos a la misma distancia uno del otro.

- Dividan cada unidad en el número de partes que indica el denominador.

- Cuenten el número de partes que indica el numerador. Si es positivo, se avanza hacia la derecha y si es negativo, hacia la izquierda. Donde termine el conteo ahí se representa el racional solicitado.

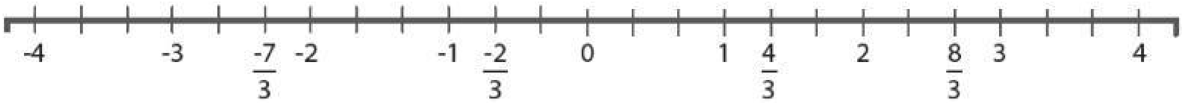
- El número racional se representa con un punto. En la siguiente figura, se representa el racional $\frac{8}{3}$ en la recta numérica, cuyas unidades positivas se han dividido en tercios.




**Representación de racionales en la recta numérica**

Cuando la recta es horizontal, los números racionales positivos ($Q^+$) se representan a la derecha del 0 y los números racionales negativos ($Q^-$), a la izquierda de 0. Como se muestra en la siguiente figura.

**Representación de racionales positivos y negativos en la recta numérica**




Cuando la recta es vertical, los números racionales positivos ($Q^+$) se representan arriba del 0 y los números racionales negativos ($Q^-$), abajo del 0.

- Representen en una recta horizontal cada uno de los siguientes números racionales:

  Realiza este punto en tu cuaderno.

  $\frac{3}{5}$ $\frac{13}{4}$ $-\frac{10}{2}$ $-\frac{8}{15}$

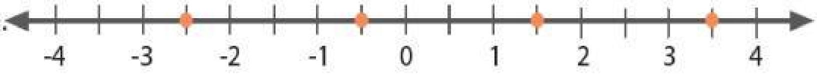
**Nivel académico de un curso de 30 estudiantes**

| | Número de materias pendientes | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Parte del total de los estudiantes (frecuencia relativa) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{15}$ |
| Número de estudiantes (Frecuencia absoluta) | | | | | | |

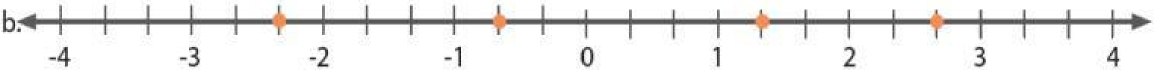
3. Escribe los números racionales que corresponden a los puntos que están representados en cada recta numérica de la figura a continuación.

Representación de racionales en la recta numérica

a.




b.




4. Verifica cuáles números racionales están correctamente representados en la recta: