

MATRIKS

Untuk SMA/MA/SMK/MAK

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ P &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fitriani Rahayu



ABSTRAK

Tujuan dikembangkannya buku ini yaitu agar dapat digunakan oleh tenaga kependidikan dalam upayanya memudahkan proses belajar mengajar siswa SMA/SMK kelas XI pada materi matriks. Pendidikan merupakan usaha sadar dan terencana untuk mewujudkan suasana belajar dan proses pembelajaran secara aktif, mengembangkan potensi diri untuk memiliki kekuatan spiritual keagamaan, kepribadian, kecerdasan, serta keterampilan yang diperlukan masyarakat. Media merupakan salah satu sarana yang dibutuhkan dan digunakan dalam kegiatan pendidikan. Buku merupakan salah satu media pembelajaran yang dapat digunakan oleh tenaga kependidikan untuk meningkatkan potensi peserta didik. Penyampaian materi pada buku ini dibuat dengan bahasa yang baik, mudah dipahami dan mendidik.

Buku ini bertujuan untuk meningkatkan kemampuan peserta didik dalam proses belajar mengajar agar peserta didik dapat belajar secara mandiri. Buku ini dilengkapi dengan soal serta pembahasan yang mudah untuk dipahami oleh peserta didik.

Kata Kunci : Matematika, SMA, Matriks



KOMPETENSI DASAR DAN INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

→ **Kompetensi Dasar (KD)**

- 3.3. Menjelaskan matriks dan kesamaan matriks dengan menggunakan masalah kontekstual dan melakukan operasi pada matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, perkalian dengan matriks, transpose matriks, determinan matriks, dan invers matriks.
- 4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan operasinya.

→ **Identitas Pencapaian Kompetensi (IPK)**

- 3.3.1 Menjelaskan syarat kesamaan dua matriks.
- 3.3.2 Memahami transpose matriks.
- 3.3.3 Menyusun kesamaan matriks dengan memperhatikan ordo matriks.
- 3.3.4 Menentukan hasil operasi matriks dengan menggunakan sifat-sifat pada operasi matriks.
- 4.3.1 Menentukan penyelesaian masalah kontekstual dengan menggunakan konsep kesamaan matriks



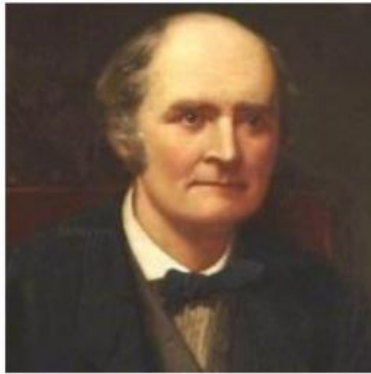
DAFTAR ISI

ABSTRAK.....	i
KATA PENGANTAR.....	ii
KOMPETENSI DASAR DAN INDIKATOR	
PENCAPAIAN KOMPETENSI	iii
DAFTAR ISI.....	iv
I. MATRIKS	
A. Pengertian, Notasi, dan Ordo Matriks.....	3
B. Jenis-jenis Matriks	6
C. Transpose Matriks dan Kesamaan Dua Matriks	12
D. Operasi pada Matriks dan Sifat-sifatnya	16
E. Determinan Matriks	27
F. Invers Matriks	34
DAFTAR PUSTAKA	

MATRIKS



Taukah kamu siapa pemenu matriks ?



Arthur Cayley lahir di Inggris pada tanggal 16 Agustus 1821. Dalam pendidikannya, Cayley merupakan mahasiswa jurusan Hukum dan ia juga pernah menjadi pengacara. Di usianya yang ke-17 tahun, tepatnya pada tahun 1859, Cayley berhasil menemukan matriks. Gagasan matriks pertama kali diperkenalkan oleh Arthur Carley (1821-1895) pada tahun 1859 di Inggris dalam sebuah studi sistem persamaan linear dan transformasi linear. Namun pada awalnya, matriks hanya dianggap permainan karna tidak bisa diaplikasikan. Hingga pada tahun 1925 tepatnya 30 tahun setelah Cayley meninggal matriks digunakan pada mekanika kuantum. Selanjutnya matriks mengalami perkembangan yang pesat dan digunakan dalam berbagai bidang.



Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering berhadapan dengan persoalan yang apabila kita telusuri ternyata merupakan masalah matematika. Dengan mengubahnya kedalam bahasa atau persamaan matematika, maka persoalan tersebut akan lebih mudah diselesaikan. Namun, terkadang kita juga mengalami kesulitan jika suatu persoalan seringkali memuat lebih dari dua persamaan atau variabel. Bahkan di Negara maju, sering ditemukan model ekonomi yang harus dipecahkan dengan suatu sistem persamaan dengan puluhan atau bahkan ratusan variabel. Pada dasarnya matriks merupakan suatu alat atau instrument yang cukup ampuh untuk memecahkan persoalan tersebut. Matriks akan memudahkan kita untuk membuat analisis-analisis yang mencakup hubungan variabel-variabel dari suatu persoalan. Berikut ini merupakan salah satu contoh persoalan yang dapat diselesaikan dengan matriks.

Kiki ingin membeli bunga untuk hadiah ibunya. Pada penjual I terdapat 5 mawar dan 7 anggrek, penjual II memiliki 4 mawar dan 5 anggrek, sedangkan penjual III memiliki 5 mawar dan 6 anggrek. Susunlah dalam tabel agar mempermudah Kiki dalam menghafal jumlah bunga mawar dan anggrek yang ada.

Alternatif Penyelesaian :

Penjual	Mawar	Anggrek
I	5	7
II	4	5
III	5	6

Dari tabel tersebut, jika angka-angkanya kita ambil dan kita tuliskan dalam kurung buka dan kurung tutup, bentuknya akan menjadi lebih sederhana, dan inilah yang biasa kita sebut dengan *matriks*.

$$\text{Matriks } A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A. Pengertian, Notasi, dan Ordo Matriks

Dari uraian diatas, kita dapat menyimpulkan :

Definisi :

Matriks adalah kumpulan bilangan, simbol, atau ekspresi, berbentuk persegi atau persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom.

Penulisan *symbol (Notasi) matriks* menggunakan huruf kapital. Susunan bilangan yang mendatar dalam matriks disebut *baris*, sedangkan susunan bilangan yang tegak pada matriks disebut *kolom*.



Secara umum matriks dituliskan :

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa elemen pada matriks A berindeks rangkap, contohnya a_{11} , itu menunjukkan matriks A pada baris ke-1 dan kolom ke-1. Begitu juga dengan elemen matriks A yang berindeks a_{mn} , itu berarti matriks A pada baris ke- m dan kolom ke- n . Lebih jelasnya, perhatikan bentuk umum matriks berikut:

$$A_{mn} = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m = baris

n = kolom

$i = 1, 2, \dots, m$

$j = 1, 2, \dots, n$


$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -8 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



B. Jenis-Jenis Matriks

☞ **Jenis-jenis matriks berdasarkan jumlah ordo:**

a. Matriks Baris

Matriks yang hanya memiliki satu baris disebut *matriks baris*.

Contoh :

$$P_{12} = [2 \quad 6] \qquad Q_{13} = [3 \quad 2 \quad 4]$$

b. Matriks Kolom

Matriks yang hanya memiliki satu kolom disebut *matriks kolom*.

Contoh :

$$R_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad S_{31} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Persegi Panjang

Matriks persegi panjang dibedakan menjadi 2, yakni matriks tegak dan matriks datar.

- **Matriks Tegak**

Matriks tegak yaitu matriks yang berordo $m \times n$ dengan $m > n$ (matriks yang jumlah barisnya lebih banyak dibandingkan dengan jumlah kolom).

Contoh :

$$H_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks H berordo 3×2 yaitu memiliki tiga baris dan dua kolom, sehingga matriks H terlihat tegak.

• Matriks Datar

Berbeda dengan matriks tegak, *matriks datar* memiliki ordo $m \times n$ dengan $m < n$ (matriks yang jumlah barisnya lebih sedikit dibandingkan dengan jumlah kolom).

Contoh :

$$Q_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Q berordo 2×3 yaitu memiliki dua baris dan tiga kolom, sehingga matriks Q adalah matriks datar.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi yaitu matriks yang memiliki jumlah baris dan kolomnya sama. Misalnya matriks ordo 2×2 , matriks ordo 3×3 , dan sebagainya.

Matriks persegi memiliki *diagonal utama* dan *diagonal sekunder*. Hasil penjumlahan pada diagonal utama disebut dengan *Trace*. Lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh :

Matriks ordo 2×2

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonal sekunder *Diagonal utama*

Matriks ordo 3x3

$$B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Diagonal sekunder Diagonal utama

Pada contoh matriks A, yang menjadi diagonal utamanya adalah 2 dan 5 yaitu elemen yang berada pada kiri atas sampai ke kanan bawah. Sebaliknya yang menjadi diagonal sekunder adalah elemen yang terletak dari kanan atas sampai ke kiri bawah yaitu 3 dan 1. Begitu juga dengan matriks B yang berordo 3x3, diagonal utama dari matriks B adalah 1, 7, dan 6. Sedangkan diagonal sekundernya adalah 5, 7, dan 2.

⊗ Jenis-jenis matriks berdasarkan pola elemen penyusunnya:

a. Matriks Nol (0)

Matriks yang semua elemennya bernilai nol (0) disebut ***matriks nol***.

Contoh :

$$O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Matriks Diagonal (D)

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang tidak semua elemen yang terletak pada diagonal utama bernilai nol, elemen yang lain bernilai nol.

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Identitas (I)

Matriks identitas adalah matriks persegi yang semua elemen yang terletak pada diagonal utama bernilai satu, elemen yang lain bernilai nol.

Contoh :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah matriks persegi dengan elemen-elemen yang berada dibawah atau diatas diagonal utama semuanya bernilai nol.

Matriks segitiga dibedakan menjadi dua, yaitu:

- **Matriks Segitiga Atas (U)**

Matriks segitiga atas yaitu matriks yang elemen-elemen yang berada dibawah diagonal utama bernilai nol.

Contoh :

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Matriks Segitiga Bawah (L)**

Matriks segitiga bawah yaitu matriks yang elemen-elemen yang berada diatas diagonal utama bernilai nol.

Contoh :

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$



Contoh Soal

Perhatikan tabel berikut.

Nama Siswa	Nilai			
	Matematika	Bahasa Inggris	Bahasa Indonesia	Biologi
Adi	80	80	75	75
Arsel	75	75	80	80
Excel	75	80	80	85
Dafi	80	75	75	85
Amesha	70	80	75	80

- Buatlah sebuah matriks dari data tersebut.
- Tentukan banyaknya ordo dari matriks tersebut.
- Berdasarkan banyaknya ordo, matriks yang telah kalian buat termasuk kedalam jenis matriks apa?
- Tentukan nilai a_{21} , a_{13} , dan a_{34} .

Penyelesaian :

- Dari data yang disediakan oleh tabel, maka kita dapat membentuk sebuah matriks yaitu :

$$A_{5 \times 4} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 75 & 75 \\ 75 & 75 & 80 & 80 \\ 75 & 80 & 80 & 85 \\ 180 & 75 & 75 & 85 \\ 70 & 80 & 75 & 80 \end{bmatrix}$$

- b) Matriks A memiliki 5 baris dan 4 kolom, hal ini berarti matriks A memiliki ordo 5×4 .
- c) Berdasarkan banyaknya ordo, matriks A termasuk kedalam jenis matriks persegi panjang (matriks tegak)
- d) a_{21} adalah elemen yang berada pada baris ke-2 dan kolom ke-1 = 75
- a_{13} adalah elemen yang berada pada baris ke-1 dan kolom ke-3 = 75
- a_{34} adalah elemen yang berada pada baris ke-3 dan kolom ke-4 = 85



Latihan 2

1. Jumlah elemen-elemen pada diagonal utama matriks

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 12 & 3 & -2 \\ 6 & 10 & 8 \end{bmatrix} \text{ adalah...}$$

2. Buatlah matriks identitas yang memiliki ordo 3×3 !

3. Diketahui matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & b-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ a+b & 2a+c & 7 \end{bmatrix}$ adalah

matriks diagonal. Nilai $a, b, \text{ dan } c$ adalah...