

1. Стъпки за решаване:

- 1) Записваме даденото;
- 2) Изразяваме всички числа с формулата за a_n на едната от прогресиите;
- 3) Използваме свойството на другата прогресия;
- 4) Решаваме получената система от началните условия и/или свойства. Ако сме изразили числата от аритметичната прогресия в стъпка 2, то системата може да се реши чрез заместване или (след умножение с подходящи множители) чрез събиране. Ако сме изразили числата от геометричната прогресия в стъпка 2, то системата може да се реши чрез деление.

Преди да направим примерна задача, нека да припомним, че за аритметичната прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots$ имаме:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \text{ и свойството ѝ е, че } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

За геометричната прогресия $b_1, b_2, b_3, \dots$ пък, имаме:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \text{ и свойството ѝ е, че } (b_n)^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$$

(За постоянство, ще се стараем винаги да бележим аритметичната прогресия с $a_1, a_2, a_3, \dots$ а геометричната с $b_1, b_2, b_3, \dots$ макар, че съществуват задачи с две аритметични или с две геометрични прогресии. При тях с a_n ще бележим „първата“ прогресия, а с b_n – „втората“)

Съвет от господина Когато е възможно, изразявайте числата от геометричната прогресия с a_1 и q (дори тя да не е първата в условието)! Така ще ги решаваме и в час. Разбира се, не е грешно да ги изразите и с аритметичната прогресия, но внимавайте със сметките, които могат да се получат!

Пример 1: Сборът на три числа, образуващи намаляваща геометрична прогресия, е равен на 26. Ако второто увеличим с 4, а другите две запазим, получените числа образуват аритметична прогресия. Намерете първоначалните три числа.

Решение:

(Стъпка 1) Дадено ни е, че:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 26 \text{ и } b_1 = a_1; b_2 + 4 = a_2; b_3 = a_3$$

(Стъпка 2) Използвайки, че $b_2 = b_1 \cdot q$ и $b_3 = b_1 \cdot q^2$ изразяваме горните две равенства от даденото:

$$b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 26 \text{ и } a_1 = b_1; a_2 = b_1 \cdot q + 4; a_3 = b_1 \cdot q^2$$

(Стъпка 3) Използваме свойството на другата прогресия (в случая е аритметичната):

От $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ получаваме, че $2 \cdot (b_1 \cdot q + 4) = (b_1) + (b_1 \cdot q^2)$. Този израз, заедно със условието за сбора образуват системата:

$$\begin{cases} 2 \cdot b_1 \cdot q + 8 = b_1 + b_1 \cdot q^2 \\ b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (2 \cdot q - 1 - q^2) = -8 \\ b_1 \cdot (1 + q + q^2) = 26 \end{cases}$$

(Стъпка 4) Решаваме системата чрез деление (нямаме проблем с ДС защото нито b_1 , нито $1 + q + q^2$ могат да са нула, понеже произведението им е 26). Получава се:

$$\frac{b_1 \cdot (2 \cdot q - 1 - q^2)}{b_1 \cdot (1 + q + q^2)} = \frac{-8}{26} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot q - 1 - q^2}{1 + q + q^2} = \frac{-4}{13} \text{ което решаваме като умножим на кръст}$$

$$26 \cdot q - 13 - 13q^2 = -4 - 4q - 4q^2 \Leftrightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0 \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

С дискриминанта (или ако сте успели да запомните) намираме, че решенията са $q = 3$ или $q = \frac{1}{3}$. Сега заместваме в едно от двете уравнения на системата (можем да го направим на всяка стъпка **ПРЕДИ** делението, но в последната обикновено е най-лесно понеже имаме b_1 и q отделени със скоби). Разбира се, сега имаме в условието, че геометричната прогресия е намаляваща, така че $q = 3$ не е решение на задачата. Получаваме:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot \left(\frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{9}\right) &= -8 \Leftrightarrow b_1 \cdot \left(\frac{6}{9} - \frac{9}{9} - \frac{1}{9}\right) = -8 \Leftrightarrow b_1 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = -8 \\ \Leftrightarrow b_1 &= -8 : \left(-\frac{4}{9}\right) = -8 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = +2 \cdot 9 = 18 \text{ когато } q = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Така числата се получават $b_1 = 18$; $b_2 = b_1 \cdot q = \frac{18}{3} = 6$ и $b_3 = b_2 \cdot q = \frac{6}{3} = 2$ (според определението, всяко следващо число в геометричната се получава от предходното като умножим по q).

Отговор: 18, 6 и 2

Пример 2: Сборът на три положителни числа, образуващи аритметична прогресия, е равен на 9. Ако третото увеличим с 4, а другите две запазим, получените числа образуват геометрична прогресия. Намерете първоначалните три числа.

Решение:

Нека комбинираме Стъпка 1 и Стъпка 2 като започнем с геометричната прогресия b_1 ; $b_1 \cdot q$; $b_1 \cdot q^2$ и се върнем назад към първоначалната аритметична.

От условието, че $a_3 + 4 = b_3$ следва, че $a_3 = b_1 \cdot q^2 - 4$ а щом другите числа се запазват имаме $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2 = b_1 \cdot q$. Така условието за сбора на числата става:

$a_1 + a_2 + a_3 = 9 \Leftrightarrow b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 - 4 = 9$, а като добавим и свойството на аритметичната прогресия (Стъпка 3) $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ получаваме системата:

$$\begin{cases} 2 \cdot b_1 \cdot q = b_1 + b_1 \cdot q^2 - 4 \\ b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (2 \cdot q - 1 - q^2) = -4 \\ b_1 \cdot (1 + q + q^2) = 13 \end{cases} \text{ и след като разделим:}$$

$$\frac{2 \cdot q - 1 - q^2}{1 + q + q^2} = \frac{-4}{13} \Leftrightarrow 26q - 13 - 13q^2 = -4 - 4q - 4q^2 \Leftrightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$3q^2 - 10q + 3 = 0$ което има решения $q = 3$ или $q = \frac{1}{3}$ както обсъдихме. Така за b_1 имаме два случая: $b_1 \cdot (1 + 3 + 3^2) = 13 \Leftrightarrow b_1 \cdot 13 = 13 \Leftrightarrow b_1 = 1$ когато $q = 3$

$$\text{и } b_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = 13 \Leftrightarrow b_1 \cdot \left(\frac{9}{9} + \frac{3}{9} + \frac{1}{9}\right) = 13 \Leftrightarrow b_1 = 13 : \frac{13}{9} = 13 \cdot \frac{9}{13} = 9 \text{ за } q = \frac{1}{3}$$

Първоначалните числа пък се получават от зависимостите $a_1 = b_1$; $a_2 = b_1 \cdot q$ и $a_3 = b_1 \cdot q^2 - 4$ които вече записахме. Така при двата случая получаваме:

1; 3; 5 и 9; 3; -4 само първият от които изпълнява условието числата да са положителни.

Отговор: 1, 3 и 5

Опитайте сами:

Инструкции: Пишете числата a_1 и b_1 като a_1 и b_1 за да може системата да ги отчете. Също така използвайте a_1 ; a_2 ; a_3 само за аритметичната прогресия и b_1 ; b_2 ; b_3 само за геометричната прогресия. Съответно q^2 пишете като q^2 .

Пример 3: Сборът на три числа, образуващи растяща геометрична прогресия, е равен на 42. Ако второто увеличим с 4, третото намалим с 10, а първото запазим, то получените числа образуват аритметична прогресия. Намерете първоначалните три числа.

Решение: (Всяка стъпка поотделно)

(Стъпка 1) Дадено ни е, че:

$$+ \quad + \quad = 42 \text{ и } b_1 = a_1; \quad + 4 = \quad ; \quad - 10 =$$

(Стъпка 2) Използваме, че $b_2 = b_1 \cdot q$ и $b_3 = b_1 \cdot q^2$ за да изразим горните две равенства:

$$+ \quad + \quad = 42 \text{ и } b_1 = a_1; \quad + 4 = \quad ; \quad - 10 =$$

(Стъпка 3) Свойството на аритметичната прогресия $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ ни дава:

2. ($\quad + 4$) = (b_1) + ($\quad - 10$). Като разкрием скобите, заедно със условието за сбора получаваме системата системата:

$$\left| \begin{array}{l} 2. \quad + 8 = b_1 + \quad - 10 \\ b_1 + \quad + \quad = 42 \end{array} \right.$$

и след като прехвърлим всичко с b_1 в ляво, за да можем да го извадим пред скоби:

$$\left| \begin{array}{l} b_1 \cdot (\quad - 1 - \quad) = -18 \\ b_1 \cdot (\quad) = 42 \end{array} \right.$$

(Стъпка 4) Опитайте сами в тетрадките си да намерите $q = 4$ или $q = \frac{1}{4}$ и да получите

Отговор: 2; 8 и 32 (защото 32; 8 и 4 са намаляваща прогресия и не е решение)

Пример 3: Сборът на три положителни числа, образуващи аритметична прогресия, е равен на 18. Ако всяко от тях увеличим съответно с 1; 2 и 7 (когато кажат съответно, се има предвид че първото се увеличава с 1; второто се увеличава с 2 и третото се увеличава с 7), то получените числа образуват геометрична прогресия. Намерете първоначалните три числа.

Решение: (Комбинируйте Стъпка 1 и Стъпка 2)

Започваме с геометричната прогресия $b_1; b_1 \cdot q; b_1 \cdot q^2$ и се връщаме назад към първоначалната аритметична. По условие имаме, че:

$$\begin{aligned} +1 &= \quad \Rightarrow \quad = \quad -1 \\ +2 &= \quad \Rightarrow \quad = \quad -2 \\ +7 &= \quad \Rightarrow \quad = \quad -7 \end{aligned}$$

Така условието за сбора на числата става:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 18 \Leftrightarrow \quad -1 + \quad -2 + \quad -7 = 18 \\ &\Leftrightarrow b_1 \cdot (\quad) = \end{aligned}$$

(Стъпка 3) Свойството на аритметичната прогресия $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ ни дава:

$$2 \cdot (\quad - 2) = (\quad - 1) + (\quad - 7)$$

и след като прехвърлим всичко с b_1 в ляво, за да можем да го извадим пред скоби:

$$\Leftrightarrow b_1 \cdot (\quad - 1 - \quad) =$$

(Стъпка 4) Опитайте сами в тетрадките си да направите системата, да разделите и намерите $q = 2$ или $q = \frac{1}{2}$ и да получите

Отговор: 3; 6 и 9 (защото 15; 6 и -3 съдържа отрицателно и не е решение)