LKPD PROSEDUR

Rotasi

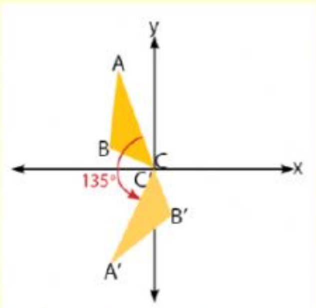
Sebelum membahas rotasi, Apakah kalian masih ingat nilai trigonometri untuk sudut-sudut istimewa? Untuk mengingat kembali, lengkapi table berikut ini

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Sin		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	
Cos	1		$\frac{1}{2}\sqrt{2}$		0

$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$ 0 1

Sesuai dengan pertemuan sebelumnya rotasi adalah perpindahan kedudukan dengan cara diputar sebesar α terhadap sumbu putar. Berdasarkan kesepakatan arah putar rotasi mempengaruhi nilai dari α, untuk rotasi searah jarum jam maka sudut yang terbentuk adalah $-\alpha$. Sedangkan untuk rotasi berlawanan arah jarum jam sudut yang terbentuk sebesar α. Hasil rotasi objek tergantung dengan sumbu putar (pusat) dan sudut putar (α).

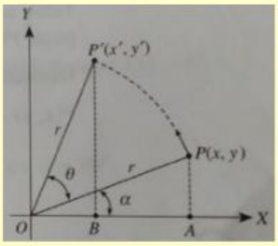
Berikut ini ilustrasi :



Dari gambar disamping menjelaskan, bahwa segitiga ABC dirotasi sebesar $135°$ dengan pusat (0,0), menghasilkan bayangan A'B'C'. Untuk mendapatkan hasil rotasi dengan cara menggambar kurang efektif, sehingga kita dapat memanfaatkan matriks yang bersesuaia dengan rotasi.

Sesuai dengan pernyataan sebelumnya hasil dari rotasi suatu objek salah satunya tergantung dengan pusat atau sumbu putarnya.

1. Rotasi dengan Pusat (0,0)



Kembali lagi ke materi koordinat polar,

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

Maka nilai dari

$x' = r\cos(\alpha + \theta)$

Gunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih sudut

$x' = r\cos(\alpha + \theta)$

$x' = r\cos\alpha \,.\cos\theta - r\sin\alpha . \sin\theta$

Subtitusikan $x = r\cos\alpha$ dan $y = r\sin\alpha$

$x' = x\ .\cos\theta - y.\sin\theta$

Sekarang untuk y'

$y' = r\sin(\alpha + \theta)$

$y' = r\sin\alpha \,.\cos\theta + r\cos\alpha . \sin\theta$

$y' = y\,.\cos\theta + x.\sin\theta$

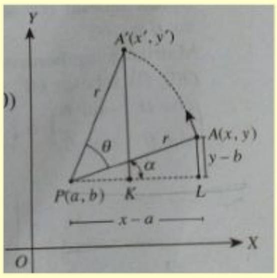
$y' = x.\sin\theta + y\,.\cos\theta$

Jika dituliskan menggunkan aturan matriks, maka

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\ .\cos\theta - y.\sin\theta \\ x.\sin\theta + y\,.\cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Rotasi dengan Pusat P(a,b)



Sama halnya dengan menentukan rotasi dengan pusat (0,0).

$(x-a) = r\cos\alpha$

$(y-b) = r\sin\alpha$

Maka nilai dari

$x' - a = r\cos(\alpha+\theta)$

Gunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih sudut

$x' - a = r\cos(\alpha+\theta)$

$x' - a = r\cos\alpha\,.\cos\theta - r\sin\alpha.\sin\theta$

Subtitusikan $x - a = r\cos\alpha$ dan $y - b = r\sin\alpha$

$x' - a = (x-a)\ .\cos\theta - (y-b).\sin\theta$

Sekarang untuk y'

$y' - b = r\sin(\alpha+\theta)$

$y' - b = r\sin\alpha\,.\cos\theta + r\cos\alpha.\sin\theta$

$y' - b = (y-b)\,.\cos\theta + (x-a).\sin\theta$

$y' - b = (x-a).\sin\theta + (y-b)\,.\cos\theta$

Jika dituliskan menggunkan aturan matriks, maka

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-a)\ .\cos\theta - (y-b).\sin\theta \\ (x-a).\sin\theta + (y-b).\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Lengkapi contoh soal berikut ini

1. Titik A(2,1) dirotasikan terhadap titk O(0,0) sejauh 90^0 berlawanan arah putaran arah jarum jam. Bayangan titik A adalah :

   Dik :

   A= (2,1), Pusat O=(0,0),

   Diputar berlawanan arah jarum jam maka nilai α

-90^0	90^0

   Dit:

   A'=...?

   Jawab;

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

   Perkalian Matriks
   Baris x Kolom

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0).(\quad) + (-1).(\quad) \\ (1).(\quad) + (0).(\quad) \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

2. Jika garis x-2y=5 diputar 90^0 terhadap titik (2,4) berlawanan arah putaran jam, maka persamaan bayangannya adalah :

   Dik :

   Persamaan garis x-2y=5, Pusat P=(2,4),

   Diputar berlawanan arah jarum jam maka nilai α

-90^0	90^0

   Dit:

   Persamaan bayangan garis=...?

   Jawab:

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \; 2 \\ y - \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \square \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & -1 \\ 1 & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \quad \\ y - \; 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \square \end{pmatrix}$$

Perkalian Matriks
Baris x Kolom

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.(x-2) + (-1).(y-4) \\ (1).(x-2) + 0.(y-4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad -y \\ x - \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad -y \\ x + \quad \end{pmatrix}$$

Dengan demikian

$x' = 6 - y \rightarrow y = 6 - x'$

$y' = x + 2 \rightarrow x = y' - 2$

Subtitusikan $x = y' - 2$ dan $y = 6 - x'$ ke persamaan garis $x - 2y = 5$, diperoleh:

$(y' - \quad) - 2(\quad - x') = 5$

$(y' - 2) - (\quad - 2x') = 5$

$y' - 2 - 12 + 2x' = 5$

$y' - \quad + 2x' = 5$

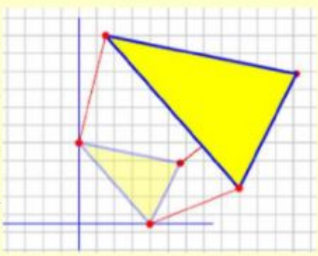
$y' + 2x' = 5 + 14$

$y' + 2x' = 19$

Dilatasi

Perkalian atau dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan factor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut dengan faktor dilatasi atau faktor skala (k) dan titik tertentu itu dinamakan titik pusat. Jika yang di dilatasikan adalah berupa bangun maka, bangun tersebut mengalami perubahan ukuran sebanyak k kali. Sehingga yang menentukan hasil atau bayangan objek yang dilatasi adalah Faktor skala (k) dan Titik Pusat. Dilatasi juga dapat dipahami sebgai bentuk pembesaran atau pengecilan dari titik-titik yang membuat bangun.

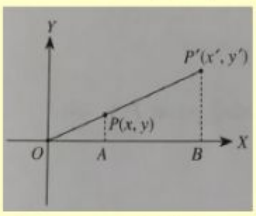
Berikut ini ilustrasinya:



Dari gambar ini kita dapat mengetahui bahwa dilatasi mengubah ukuran segitiga sebanyak k kalinya dengan pusat P(a,b). Setiap titk pada segitiga di dilatasikan sebanyak k, sehingga membentuk bayangan berupa segitiga yang diperbesar.

Sesuai dengan pernyataan sebelumnya bahwa bayangan yang dibentuk dengan dilatasi salah satunya tergantung dengan titik pusat.

1. Dilatasi dengan pusat O(0,0)



Kembali ke materi kesebangunan

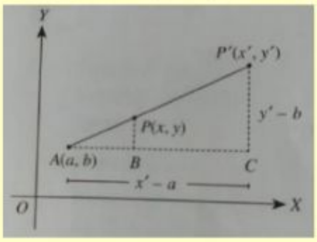
ΔOAP sebangun dengan $\Delta OBP'$, sehingga diperoleh :

$$OB = kOA \rightarrow x' = kx$$
$$BP' = kAP \rightarrow y' = ky$$

Bayangan titik P yang didilatasikan sebanyak K dan berpusat di (0,0) adalah P'(x',y') dengan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x) + 0(y) \\ 0(x) + k(y) \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Dilatasi dengan pusat P(a,b)



Kembali ke materi kesebangunan

ΔOAP sebangun dengan $\Delta OBP'$, sehingga diperoleh :

$AC = kAB \rightarrow (x' - a) = k(x - a)$
$CP' = kBP \rightarrow (y' - b) = k(y - b)$

Bayangan titik P yang didilatasikan sebanyak K dan berpusat di A(a,b) adalah P'(x',y') dengan:

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x-a) + 0(y-b) \\ 0(x-a) + k(y-b) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Lengkapi contoh soal berikut ini:

1. Bayangan titik P(-6,3) oleh dilatasi terhadap titik pusat O(0,0) dengan faktor skala $-{}^{1}/_{2}$ adalah:

   Dik :

   P(-6,3) didilatasi sebanyak $k = -{}^{1}/_{2}$ dengan pusat O(0,0)

   Dit :

   P=...?

   Jawab :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & -{}^{1}/_{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Perkalian Matriks
Baris x Kolom

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-{}^{1}/_{2}\right)(-6) + (0)(\quad) \\ (\quad)(-6) + \left(-{}^{1}/_{2}\right)(3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square\\(-{}^{3}/_{2})\end{pmatrix}$$

2. Bayangan titik P (2,-1) oleh dilatasi terhadap titik pusat A(3,4) dengan faktor skala (-3) adalah:

   Dik :

   P (2,-1) didilatasi dengan k= -3 terhadap pusat A (3,4)

   Dit

   P'=...?

   Jawab:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\quad\\-1-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\\quad\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\\quad\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\square\\4\end{pmatrix}$$

Perkalian Matriks
Baris x Kolom

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-3)(-1)+(0)(\quad)\\(\quad)(-1)+(\quad)(-5)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+3\\\square\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}$$

Transformasi Oleh Suatu Matriks

Misalkan titik P (x,y) ditransformsikan dengan $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan titik $P'(x', y')$ dengan $x' = ax + by$ dan $y' = cx + dy$. Bayangan titik P(x,y) terhadap $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{matrix} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{matrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pada intinya untuk menentukan bayangan titik yang ditrasnformasikan oleh matriks kita hanya perlu mengkalikan matriks tersebut dengan titik.

Lengkapi Contoh Soal Berikut:

1. Bayangan A (3,-4) oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ adalah…

   Dik :

   A (3,-4) ditransformasikan oleh matriks $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

   Dit:

   A'=…?

   Jawab:

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   Perkalian Matriks
   Baris x Kolom

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(\quad) + (\quad)(-4) \\ (\quad)(3) + (5)(\quad) \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3) + (\quad) \\ (\quad) + (-20) \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\quad)$$