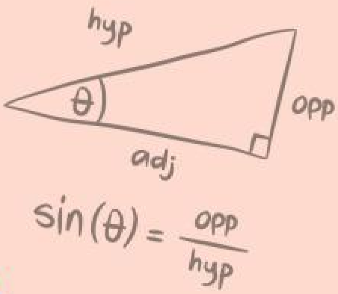
Pembelajaran Matematika

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Matematika Peminatan Kelas XII



f(x)

Kelompok: ....

1

2

3

4

Petunjuk Kegiatan

1. Tulislah nama anggota kelompok pada tempat yang telah disediakan.
2. Baca petunjuk LKPD dan langkah-langkah kegiatan dengan benar.
3. Jawablah pertanyaan pada tempat yang telah disediakan.
4. Diskusikan dengan teman sekelompokmu mengenai aktivitas serta permasalahan-permasalahan yang disajikan dalam LKPD. Kemudian, tuliskan hasil diskusi pada tempat yang disediakan.
5. Jika masih terdapat masalah yang tidak dapat diselesaikan dengan diskusi kelompok maka tanyakan kepada guru.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mengerjakan lembar kerja ini, siswa diharapkan dapat:

1. memahami konsep limit dan limit fungsi
2. menentukan teorema limit fungsi trigonometri
3. menyelesaikan limit fungsi trigonometri
4. menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

Ilustrasi

Balap sepeda merupakan sebuah olahraga yang menggunakan sepeda untuk berkompetisi dengan pesepeda lainnya untuk mencapai garis finish. Balap sepeda bisa dilakukan di jalan umum/jalan raya, arena Velodrome (lintasan khusus balapan sepeda), dan di gunung. Balap sepeda pertama kali diperkenalkan di Eropa sekitar akhir abad ke 19, setelah itu mulai menyebar hingga ke Amerika Serikat dan kini hampir ke seluruh dunia. Kejuaraan dunia Balap Sepeda diadakan pertama kali pada tahun 1893 dan menjadi bagian Olimpiade sejak tahun 1896 di Athena. terdapat 4 cabang olahraga Balap sepeda yaitu Road Race, CyclingTrack, Mountain Biking, dan Bicycle Motocross. Road Race adalah cabang dimana para atlet sepeda melakukan balapan di jalan.

Seorang altet sepeda tengah mempersiapkan diri untuk mengikuti olimpiade internasional. Untuk itu, ia melakukan latihan berulang-ulang. Pada lintasan lurus ia mampu mengayuh sepeda hingga kecepatan 43 km/jam. Namun, saat melalui tikungan dengan kecepatan 43 km/jam, sepeda keluar jalur. Kemudian Ia melakukan percobaan berulang-ulang agar mendapatkan kecepatan paling maksimal tetapi tidak membuat sepeda keluar jalur. Altet tersebut melakukan percobaan dengan mengurangi dan menambahi kecepatan dengan cara menambah atau mengurahi kekuatan kayuhan pada pedal.

Pada percobaan pertama, atlet memakai kekuatan 38 newton menghasilkan kecepatan 30 km/jam sehingga sepeda tidak keluar jalur. Percobaan Kedua atlet menambah kekuatan menjadi 40 newton, kecepatan sepeda mencapai 31 km/jam tetapi sepeda keluar jalur. Kemudian ia menurunkan kekuatannya menjadi 39.5 newton, sepeda masih keluar jalur. Ia terus mengurangin kekuatanya, sampai saat ia menggunakan kekuatan 38.5 newton, sepeda tidak keluar jalur. Ia masih ingin melihat batas maksimal kekuatan pedal agar kecepatan maksimal tetapi tidak keluar jalur. Ia pun menambah dan mengurangi kekuatannya sedikit demi sedikit. Tabel perubahan kekuatan kayuhan pedal dan kecepatan sepeda tersebut dapat dilihat dari tabel berikut

Tabel kekuatan kayuhan pedal dan kecepatan sepeda

Kekuatan Kayuhan pedal (Newton)	38	38,2	38,5	...	39	...	39,5	40
Kecepatan sepeda (km/jam)	30	30,1	30,25	...	?	...	30,75	31

Ayo Berdiskusi

1. Berapa kira-kira kecepatan sepeda saat kekuatan kayuhan atlet mendekati 39 newton dari kanan?
2. Berapa kira-kira kecepatan sepeda saat kekuatan kayuhan atlet mendekati 39 newton dari kiri?
3. Berapakah kecepatan sepeda saat kekuatan kayuhan atlet 39kg?
4. Apakah kecepaan sepeda saat kekuatan kayuhan atlet 39kg itu tepat?
5. Misalkan kecepatan sepeda sebagai f(x), dan kekuatan kayuhan adalah x, maka nilai f(x) untuk x=39 adalah?

Kalian sudah mendapatkan bahwa dari arah kiri limit f(x) untuk x mendekati 39 bernilai 30. Begitu juga dengan nilai limit f(x) untuk x mendekati 39 dari arah kanan juga bernilai 130. Hal ini berarti bahwa limit f(x) untuk x mendekati 39 bernilai 30. Kesimpulan ini menjadi dasar dalam memformulasikan definisi limit fungsi secara intuitif berikut.

DEFINISI

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \rightarrow R$.

- $\lim_{x \to c} f(x)$, berarti untuk x mendekati c, maka $f(x)$ mendekati L,
- jika limit kiri $\lim_{x \to c^-} f(x)$ ada dan limit kanan $\lim_{x \to c^+} f(x)$ ada, sehingga $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$ maka $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Catatan: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dibaca limit $f(x)$, untuk x mendekati c sama dengan L

Contoh Soal

Perkirakan nilai $\lim_{x \to 5}(x + 2)$ dengan definisi intuitif

Alternatif penyelesaian:

Nilai $f(x) = x + 2$ untuk x mendekati 5, dapat dilihat pada tabel berikut

x		4	4,5	4,99	4,999	...	5	....	5,001	5,01	5,5	6
$f(x)$		6	6,5	6,99	6,999	...	7	....	7,001	7,01	7,5	8

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh

Untuk x mendekati 5 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati 7, artinya $\lim_{x \to 5^-}(x + 2) = 7$.

Untuk x mendekati 5 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati 7, artinya $\lim_{x \to 5^+}(x + 2) = 7$.

Hal ini berarti $\lim_{x \to 5^-}(x + 2) = \lim_{x \to 5^+}(x + 2) = 7$ akibatnya $\lim_{x \to 5}(x + 2) = 7$.

Ayo Mencoba

1. Perkirakan nilai $\lim_{x \to 9}(x-6)$ dengan definisi intuitif

Alternatif penyelesaian:

Nilai $f(x) = x - 6$ untuk x mendekati 9, dapat dilihat pada tabel berikut

x	8					...	9	....				10
$f(x)$						...		....				

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh

Untuk x mendekati 9 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati , artinya $\lim_{x \to 9^-}(x-6) =$.

Untuk x mendekati 9 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati , artinya $\lim_{x \to 9^+}(x-6) =$.

Hal ini berarti $\lim_{x \to 9^-}(x-6) = \lim_{x \to 9^+}(x-6) =$. Akibatnya $\lim_{x \to 9}(x-6) =$.

2. Perkirakan nilai $\lim_{x \to 4}\left(\frac{2x-4}{x-2}\right)$ dengan definisi intuitif

Alternatif penyelesaian:

Nilai $f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$ untuk x mendekati 4, dapat dilihat pada tabel berikut

x						...	4	....				
$f(x)$						...		....				

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh

Untuk x mendekati 4 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati , artinya $\lim_{x \to 4^-}\left(\frac{2x-4}{x-2}\right) =$

Untuk x mendekati 9 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati , artinya $\lim_{x \to 4^+}\left(\frac{2x-4}{x-2}\right) =$

Hal ini berarti $\lim_{x \to 4^-}\left(\frac{2x-4}{x-2}\right) = \lim_{x \to 4^+}\left(\frac{2x-4}{x-2}\right) =$. Akibatnya $\lim_{x \to 4}\left(\frac{2x-4}{x-2}\right) =$.

Setelah mempelajari definisi intuitif limit, sekarang coba temukan limit dari fungsi-fungsi trigonometri berikut menggunakan definisi intuitif

1. Perkirakan nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ dengan definisi intuitif

Alternatif penyelesaian:

Nilai $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ untuk x mendekati 0, dapat dilihat pada tabel berikut

x	-1	-0.5	-0.1	-0,001	...	0	....	0.001	0.1	0.5	1
$f(x)$					...		....				

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \cdots$

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \cdots$

Hal ini berarti $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \cdots$. Akibatnya $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \cdots$.

2. Perkirakan nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$ dengan definisi intuitif

Alternatif penyelesaian:

Nilai $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ untuk x mendekati 0, dapat dilihat pada tabel berikut

x	-1	-0.5	-0.1	-0,001	...	0	....	0.001	0.1	0.5	1
$f(x)$					...		....				

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{\sin x} = \cdots$

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = \cdots$

Hal ini berarti $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = \cdots$. Akibatnya $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \cdots$

3

Perkirakan nilai $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$ dengan definisi intuitif

Alternatif penyelesaian:

Nilai $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ untuk x mendekati 0, dapat dilihat pada tabel berikut

x	-1	-0.5	-0.1	-0,001	...	0	....	0.001	0.1	0.5	1
$f(x)$					...		....				

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} = \cdots$.

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \cdots$.

Hal ini berarti $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \cdots$. Akibatnya $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = \cdots$

4

Perkirakan nilai $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ dengan definisi intuitif

Alternatif penyelesaian:

Nilai $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ untuk x mendekati 0, dapat dilihat pada tabel berikut

x	-1	-0.5	-0.1	-0,001	...	0	....	0.001	0.1	0.5	1
$f(x)$					...		....				

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{x} = \cdots$

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x} = \cdots$

Hal ini berarti $\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x} = \cdots$. Akibatnya $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \cdots$

5

Perkirakan nilai $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$ dengan definisi intuitif

Alternatif penyelesaian:

Nilai $f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$ untuk x mendekati 0, dapat dilihat pada tabel berikut

x	-1	-0.5	-0.1	-0,001	...	0	....	0.001	0.1	0.5	1
$f(x)$					...		....				

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{\sin x} = \cdots$

Untuk x mendekati 0 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati .... , artinya $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{\sin x} = \cdots$

Hal ini berarti $\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{\sin x} = \cdots$. Akibatnya $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \cdots$

Kesimpulan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} =$$

Sifat-sifat limit fungsi

$$\lim_{x\to a} k.f(x) = k \times \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Menggunakan teorema limit trigonometri, sifat-sifat limit fungsi, serta identitas dan rumus-rumus fungsi trigonometri, kalian akan bisa menyelesaikan soal-soal limit fungsi trionometri.

Contoh:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{2x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\sin\frac{1}{2}x\times\sin\frac{1}{2}x}{2x\tan x}=\lim_{x\to 0}2\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\tan x}$$

$$=2\times\frac{\frac{1}{2}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=2\times 4\times 1\times\frac{1}{2}\times 1=4$$

Ayo berlatih

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{4x^2}=$

Alternatif penyelesaian:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos -\cos x}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\square\times\square\times\square}{4x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\square\times\lim_{x\to 0}\frac{\square}{4x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\square}{\square}$$

$$=\square\times\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\square}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\square}{x}$$

$$=\square\times\square\times\square\times\square=1$$

2. $\lim_{x\to 0}10\tan\frac{1}{x}\operatorname{cosec}\frac{2}{x}$

Alternatif penyelesaian:

$$=\lim_{x\to 0}10\tan\frac{1}{x}.\frac{1}{\square}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{10\tan\frac{1}{x}}{\square.\square}$$

$$= \frac{10}{\quad} \lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\quad}$$

$$= \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\quad}$$

$$= \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\quad} =$$

$$= \quad \quad$$

$$= \quad$$

3. Hipotensi atau tekanan darah rendah merupakan kondisi ketika tekanan darah seseorang jauh lebih rendah dari yang seharusnya yaitu sekitar $\frac{90}{60}mmHg$, hal ini dapat menyebabkan seseorang pingsan atau pusing karena tidak menerima darah dalam jumlah cukup. Salah satu penyebab hipotensi adalah kurang aktif bergerak. Suatu penelitian mengemukakan bahwa seseorang dianjurkan bergerak secara aktif dengan minimal waktu tertentu berdasarkan umurnya. Jika minimal seseorang bergerak dengan fungsi waktu dalam jam/hari $f(t) = \frac{\sin 4x + \sin 2x}{6x \cos x}$, maka dianjurkan bagi bayi yang baru lahir untuk bergerak minimal selama ... jam/hari.

Alternatif jawaban:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{6x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\quad}{6x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\quad}{\quad \cdot \quad}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \quad$$