

T2 Potències i radicals Activitat 4 Radicals

Definicions i propietats bàsiques

Definició

Anomenem **arrel n-èsima** d'un nombre donat **a** el nombre **b** que elevat a n ens dona a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Un **radical** és equivalent a una **potència d'exponent fraccionari** en la qual el **denominador** de la fracció és l'**índex** del radical i el **numerador** de la fracció és l'**exponent** del radicand.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ per ser } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1728 & 2 \\ 864 & 2 \\ 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Càlcul d'arrels

Per calcular l'arrel n-èsima d'un nombre primer es factoritza i s'escriu el nombre en forma de potència i després s'extreuen tots els factors que sigui possible.

Si tots els exponents del radicand són múltiples de l'índex, l'arrel és exacta.

Introducció i extracció de factors

Per **introduir** un factor dins d'un radical s'eleva el factor a la potència que indica l'índex i s'escriu a dins.

Si algun factor del radicand té per exponent un nombre més gran que l'índex, es pot **extreure** fora del radical dividint l'exponent del radicand entre l'índex. El quocient és l'exponent del factor que surt a fora i la resta és l'exponent del factor que queda a dins.

Introduir

$$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$$

Extreure:

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3} \quad \begin{array}{r} 13 \\ 5 \\ \hline 3 \end{array}$$

Exemples:

$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 5}$$

Una altra forma de veure-ho:

$$50^{1/2} = (2 \cdot 5^2)^{1/2} = 2^{1/2} \cdot (5^2)^{1/2} = 2^{1/2} \cdot 5^{2 \cdot 1/2} = 2^{1/2} \cdot 5 = 5 \cdot 2^{1/2}$$

$$120^{1/3} = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^{1/3} = (2^3)^{1/3} \cdot (3 \cdot 5)^{1/3} = 2^{3 \cdot 1/3} \cdot (3 \cdot 5)^{1/3} = 2 \cdot (3 \cdot 5)^{1/3}$$

Els següents radicals són semblants:

$$2\sqrt[3]{4} ; 7\sqrt[3]{4} ; 5\sqrt[3]{4}$$

Els següents radicals no són semblants:

$$2\sqrt[3]{4} ; 2\sqrt[5]{4} \text{ L'índex és diferent}$$

Radicals semblants

Els **radicals semblants** són aquells que tenen el mateix índex i el mateix radicand. Poden diferir únicament en el coeficient que els multiplica.

Tenir radicals semblants va bé per a poder fer operacions de suma o diferència.

Exemples:

$$2 \cdot \sqrt[3]{4} + 7 \cdot \sqrt[3]{4} = (2+7) \cdot \sqrt[3]{4} = 9 \cdot \sqrt[3]{4}$$

en canvi no es poden sumar:

$$2 \cdot \sqrt[3]{4} + 7 \cdot \sqrt[5]{4}$$

4.1 Introduïu i extreieu els factors dins dels radicals

Introduïu	Extreieu
$2 \cdot \sqrt[4]{3} =$	$\sqrt[4]{128} =$
$x^2 \cdot \sqrt[7]{x^3} =$	$\sqrt{9 \cdot a^3} =$
$3 \cdot \sqrt{5} =$	$\sqrt[3]{16} =$

$2 \cdot \sqrt{a} =$	$\sqrt{98 a^3 \cdot b^5 \cdot c^7} =$
$3a \cdot \sqrt{2 \cdot a^2} =$	$\sqrt{125} =$
$a \cdot b^2 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b} =$	$\sqrt[4]{45} =$

Propietats dels radicals

Es poden fer servir les propietats de les potències per a fer les operacions de les arrels, doncs són potències però d'exponent fraccionari.

Arrel d'un producte

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

podrem fer servir la propietat directament sense passar per aquests passos intermitjos

Exemples:

$$\sqrt[3]{2 \cdot 5} = (2 \cdot 5)^{1/3} = 2^{1/3} \cdot 5^{1/3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2 \cdot b^4} = (a^2 \cdot b^4)^{1/7} = a^{2/7} \cdot b^{4/7} = \sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[7]{b^4}$$

Arrel d'un quocient

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemples:

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

Arrel d'una potència

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Exemples:

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = (\sqrt[5]{2})^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = (\sqrt[3]{x})^7$$

Arrel d'una arrel

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/nm} = \sqrt[nm]{a}$$

Exemples:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

4.2 Feu servir les propietats de les arrels per a escriure amb una sola arrel els següents termes:

$\sqrt[5]{\sqrt{3}}$	
$\sqrt[7]{x^4 \cdot \sqrt{x}}$	
$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$	
$\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}$	
$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$	
$\frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[4]{x^2}}$	