

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK

MATRIKS

DETERMINAN ORDO 3X3 DAN INVERS MATRIKS

TUJUAN PEMBELAJARAN

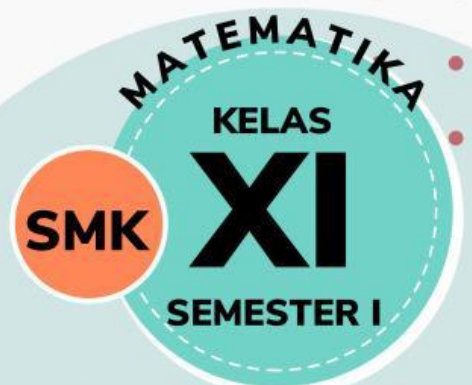
Peserta didik mampu menentukan determinan matriks ordo 3x3 dan menentukan invers matriks.

PETUNJUK Pengerjaan

- Berdoalah sebelum mulai mengerjakan LKPD.
- Tuliskan identitas pada tempat yang disediakan.
- Bacalah LKPD secara cermat dan kerjakan LKPD sesuai petunjuk.
- Diskusikan pertanyaan-pertanyaan yang terdapat dalam LKPD dengan teman sekelompokmu.
- Presentasikan hasil pekerjaan LKPD di depan kelas.
- LKPD yang telah dikerjakan dikumpulkan kepada guru.

KELOMPOK

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.





AYO KITA INGAT KEMBALI

Bagaimana cara menentukan determinan matriks ordo 2x2?

.....

.....

.....



Bagaimana cara menentukan determinan matriks ordo 3x3? Apakah sama seperti menentukan determinan matriks ordo 2x2? Mari kita pelajari dengan menyelesaikan permasalahan berikut.

AYO MENGAMATI

DETERMINAN MATRIKS 3X3

Untuk menentukan determinan dari matriks 3x3, dapat dilakukan banyak cara, salah satunya dengan aturan Sarrus. prosedur dari aturan tersebut adalah sebagai berikut.

DETERMINAN MATRIKS 3X3 DENGAN ATURAN SARRUS

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A adalah

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

- ✓ Tulis elemen dua kolom pertama di sebelah kanan matriks
- ✓ Buat garis diagonal, operasikan elemen matriksnya



AYO MENCoba 1

Diketahui matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan determinan matriks B dengan aturan Sarrus!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 |B| &= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & \dots \\ 1 & \dots \\ -3 & \dots \end{matrix} \\
 &= (\dots \times \dots \times \dots) + (\dots \times \dots \times \dots) + (\dots \times \dots \times \dots) - (\dots \times \dots \times \dots) - \\
 &\quad (\dots \times \dots \times \dots) - (\dots \times \dots \times \dots) \\
 &= \dots + \dots + \dots + \dots - \dots - \dots - \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Jadi, determinan matriks $B = \dots$

AYO MENCoba LAGI



Diketahui matriks $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, tentukan determinan matriks Q

dengan aturan Sarrus!

Penyelesaian:

INVERS MATRIKS

Matriks persegi A mempunyai invers, jika ada matriks B sedemikian hingga $AB = BA = I_{n \times n}$ dengan I matriks identitas. Pada persamaan $AB = BA = I_{n \times n}$, A dan B disebut *saling invers*. Berikut ini adalah syarat suatu matriks A mempunyai invers.

- Jika $|A| = 0$, maka matriks A tidak mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks singular.
- Jika $|A| \neq 0$, maka matriks A mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks A sebagai matriks nonsingular.



AYO MENCOBA 2

Tunjukkan bahwa $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ saling invers !

Jawab :

Kita harus membuktikan bahwa $AB = BA = I_{2 \times 2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \times \dots + \dots \times \dots & \dots \times \dots + \dots \times \dots \\ \dots \times \dots + \dots \times \dots & \dots \times \dots + \dots \times \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \times \dots + \dots \times \dots & \dots \times \dots + \dots \times \dots \\ \dots \times \dots + \dots \times \dots & \dots \times \dots + \dots \times \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $AB \dots BA \dots I_{2 \times 2}$ sehingga dapat dikatakan bahwa A dan B

.....

INVERS MATRIKS ORDO 2X2



Untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berordo 2×2 ini, kita dapat menentukan inversnya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot \text{Adj } A \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$



AYO MENCOBA 3

Tentukan invers dari $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$!

Penyelesaian:

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow |A| = (\dots \times \dots) - (\dots \times \dots) \quad \checkmark \text{ Tentukan determinan matriks}$$

$$= \dots - \dots$$

$$= \dots$$

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \checkmark \text{ Tentukan adjoin matriks}$$

$$\text{Jadi, } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{Adj } A \quad \checkmark \text{ Masukkan dalam rumus invers matriks}$$

$$= \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$



**yuk kita
buktikan!**

SIFAT-SIFAT INVERS MATRIKS 2X2

Sifat 1 Jika A adalah matriks berordo (2 x 2) dan k adalah bilangan real, maka

$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$$

Sifat 2 Jika A^t adalah transpose matriks A maka berlaku $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Sifat 3 Jika A adalah matriks berordo (2 x 2) maka berlaku $(A^{-1})^{-1} = A$

Sifat 4 Jika A dan B adalah matriks berordo (2 x 2) maka berlaku : $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

INVERS MATRIKS ORDO 3X3

Untuk menentukan invers suatu matriks dengan ordo 3x3, kalian harus memahami tentang matriks minor, kofaktor, dan adjoint.

Matriks Minor

Matriks minor M_{ij} diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j matriks A berordo 3×3 , sehingga didapat matriks baru dengan ordo 2×2 . Determinan dari matriks tersebut disebut minor dari determinan matriks A , ditulis dengan $|M_{ij}|$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

Hilangkan baris pertama dan kolom pertama

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32}$$

Hilangkan baris kedua dan kolom pertama

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

.... dan seterusnya.

Kofaktor

Kofaktor dari baris ke- i dan kolom ke- j dituliskan dengan C_{ij} .

Untuk menentukannya ditentukan dengan rumus $C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

Kofaktor-kofaktor dari matriks adalah sebagai berikut.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = |M_{11}|$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}|$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = |M_{13}|$$

.... dan seterusnya.

Adjoin



Adjoin dari suatu matriks adalah transpose dari matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor (C_{ij})

Adjoin matriks A dinotasikan $\text{adj}(A)$, dengan $\text{adj}(A) = (\text{kof}(A))^T$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

Invers matriks 3x3 adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{Adj } A$$

AYO MENCOBA 4

Diketahui matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, Tentukan invers matriks B!

Penyelesaian:

Pada **Ayo Mencoba 1** telah diperoleh determinan matriks B =

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = |\dots| = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{12}| = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|\dots| = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{13}| = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = |\dots| = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{21}| = \begin{vmatrix} -2 & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = -|\dots| = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{22}| = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = |\dots| = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{23}| = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = -|\dots| = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{31}| = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = |\dots| = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{32}| = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = -|\dots| = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |M_{33}| = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = |\dots| = \dots$$

$$\text{Diperoleh: } \text{adj}(B) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi, } B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{adj}(B) = \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pada bilangan real, dapat dikenakan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

Operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dapat dilakukan pada matriks, tetapi operasi pembagian tidak dapat dilakukan. **Jadi, jika diketahui hasil perkalian dua matriks, dengan salah satu matriks yang dikalikan telah diketahui, bagaimana cara menentukan matriks yang belum diketahui?**



Jadi jika diketahui hasil perkalian dua matriks, dengan salah satu matriks yang dikalikan telah diketahui, maka cara menentukan matriks yang belum diketahui tidak dapat menggunakan pembagian. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah dengan **invers matriks**.



Misalkan diketahui matriks A dan matriks B. Matriks A merupakan matriks persegi yang memiliki invers.

Jika $AX = B$, maka untuk menentukan matriks X adalah:



Ingat bahwa perkalian matriks tidak bersifat komutatif

$$AX = B$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} pada sebelah kiri

$$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$$

Ingat bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I matriks identitas.

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Jika I matriks identitas, $I \cdot X = X \cdot I = X$

Dengan cara yang sama, jika diketahui $XA = B$, untuk menentukan matriks X:



Ingat bahwa perkalian matriks tidak bersifat komutatif

$$XA = B$$

$$\Leftrightarrow XA^{-1}A = BA^{-1}$$

Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} pada sebelah kanan.

$$\Leftrightarrow XI = BA^{-1}$$

Ingat bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I matriks identitas.

$$\Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

Jika I matriks identitas, $I \cdot X = X \cdot I = X$

AYO MENCoba 5

Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukan matriks X.

Penyelesaian:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Maka

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\dots \times \dots - \dots \times \dots} \begin{pmatrix} 2 & \dots \\ -2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} 2 & \dots \\ -2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots \times \dots + \dots \times \dots \\ \dots \times \dots + \dots \times \dots \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, matriks $X = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

