



Matriks

(Determinan dan Invers Matriks)

Mata Pelajaran : Matematika Wajib
Kelas/Semester : XI/Gasal
Alokasi Waktu : 60 Menit

Identitas :

Kompetensi Dasar

- 3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3
4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3

Materi Pembelajaran

1. Determinan Matriks

a. Determinan matriks ordo 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

b. Determinan matriks ordo 3×3

Cara Sarrus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow \\ \ominus & \ominus & \ominus \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ \oplus & \oplus & \oplus \end{matrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Cara Ekspansi Kofaktor

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2. Invers Matriks

a. Invers matriks ordo 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b. Invers matriks ordo 3×3

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{Adj}(A) \quad \text{mencari } \text{Adj}(A) :$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

c. Penyelesaian Persamaan Matriks

- 1) Penyelesaian persamaan Matriks $AX = B$ adalah $X = A^{-1}B$
- 2) Penyelesaian persamaan Matriks $XA = B$ adalah $X = BA^{-1}$

Kegiatan 1 : Menentukan Determinan dari suatu Matriks

Masalah 1 : Determinan Matriks Berordo 2×2

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, tentukan determinan dari matriks A tersebut!

Penyelesaian :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$A = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = () () - () () =$$

Jadi, nilai determinan dari matriks A adalah ...

Masalah 2 : Penerapan konsep Determinan Matriks Berordo 2×2

Diketahui suatu persamaan $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = -4$, Tentukan nilai x -nya!

Penyelesaian :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det A = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = () () - () () = -4$$

$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad =$$

$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad =$$

$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad =$$

$$\Leftrightarrow \quad \quad \quad x =$$

Jadi, nilai x dari persamaan adalah ...

Masalah 3 : Determinan Matriks Berordo 3×3

Diketahui suatu Matriks $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, tentukan determinan dari matriks B tersebut!

A. Menggunakan Cara Sarrus

Penyelesaian :

- 1) Masukkan setiap elemen pada matriks B, kemudian tuliskan kembali elemen pada kolom 1 dan kolom 2 matriks B di sebelah kanan garis vertikal.

$$\det B = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

- 2) Jumlahkan hasil kali elemen-elemen yang terletak pada dan sejajar diagonal utama, kemudian dikurangi dengan hasil kali elemen-elemen yang terletak pada dan sejajar diagonal samping.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

diagonal samping

diagonal utama

$$\begin{aligned} \det B &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\ &= () () () + () () () + () () () - \\ &\quad () () () - () () () - () () () \\ &= () + () + () - () - () - () \\ &= \end{aligned}$$

Jadi, nilai determinan dari Matriks B adalah ...

B. Menggunakan Cara Ekspansi Kofaktor

Penyelesaian :

- 1) Pilih sembarang baris atau kolom yang diekspansi
(akan digunakan baris pertama)
- 2) Jumlahkan hasil kali masing-masing unsur yang dipilih secara baris atau kolom, dengan kofaktornya.

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\
 &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 M_{12} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 M_{13} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \det B &= 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \\
 &= 4() - 3() + 2() \\
 &= \\
 &=
 \end{aligned}$$

Jadi, nilai determinan dari Matriks B adalah ...

Kegiatan 2 : Menentukan Invers dari suatu Matriks

Masalah 4 : Invers Matriks Berordo 2×2

Diketahui suatu Matriks $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, tentukan invers dari matriks C tersebut!

Penyelesaian :

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

1) Menentukan determinan Matriks C

$$\begin{aligned}
 \det C &= \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\
 &= () () - () () \\
 &=
 \end{aligned}$$

2) Masukkan determinan yang diperoleh pada rumus berikut

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 C^{-1} &= \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi, invers dari matriks C adalah ...

Masalah 5 : Invers Matriks Berordo 3×3

Diketahui suatu Matriks $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, tentukan invers dari matriks D tersebut!

Penyelesaian :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A$$

1) Mencari determinan dari matriks D ($\det D$)

$\det D =$

2) Mencari adjoin matriks D ($\text{Adj}(D)$)

a. Mencari Minor Matriks D

$$\text{Minor } D = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc|cc} & & & & \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

b. Mencari Kofaktor Matriks D (masukkan hasil dari mencari Minor D)

$$\text{kof } D = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

c. Mencari Adjoin D (masukkan hasil dari mencari kofaktor D)

$\text{Adj } D = (\text{kof } D)^T \Rightarrow \text{Transpos dari kofaktor D}$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}^T$$
$$= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3) Menghitung invers matriks D (D^{-1})

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \text{Adj } D$$

$$= \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Jadi, invers dari matriks D adalah ...

Masalah 6 : Penyelesaian Persamaan Matriks Menggunakan Konsep Invers

Diketahui suatu Matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan Matriks $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, tentukan Matriks X berordo 2×2 yang memenuhi persamaan matriks

a. $AX = B$

b. $XA = B$

Penyelesaian:

1) Mencari determinan dari matriks A

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ &= () () - () () \\ &= \end{aligned}$$

2) Mencari Invers dari matriks A

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Menentukan Matriks X

a. $AX = B$

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, matriks X yang memenuhi adalah ...

b. $XA = B$

$$\begin{aligned} XA = B &\Leftrightarrow X = B A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, matriks X yang memenuhi adalah ...

KESIMPULAN :