

NAMA :

KELAS / NO:

Email : tribusonohariyo@gmail.com

Alokasi waktu : 4 x 45'

Tulis Nama dan Kelas/No dikotak yang tersedia

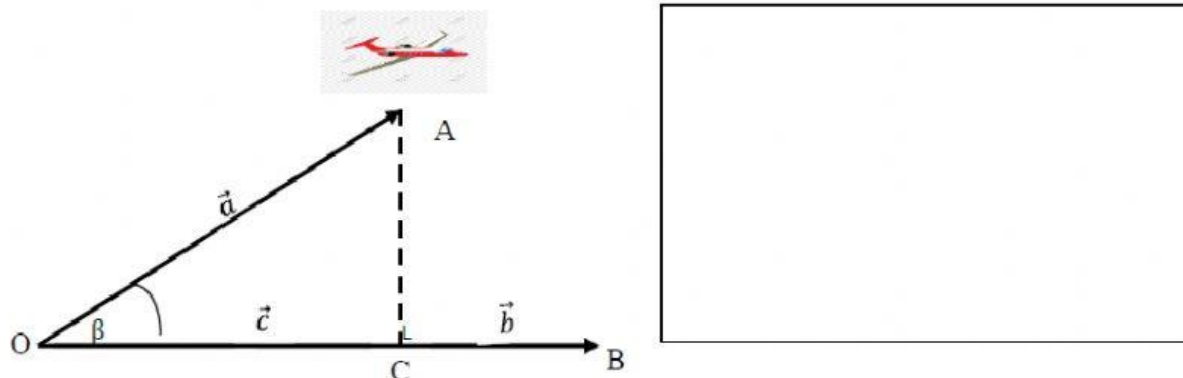
Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti pembelajaran ini, peserta didik diharapkan dapat :

1. Menjelaskan pengertian proyeksi vektor secara geometris dan analitis .
2. Menyelesaikan soal-soal proyeksi vektor

Pengantar

Sebuah pesawat terbang melakukan tinggal landas pada saat matahari tepat di atasnya. Perpindahan pesawat terbang terhadap titik tinggal landasnya dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OA}$. Pada saat bersamaan bayangan pesawat terbang pun melakukan perpindahan pada lintasan di tanah. Vektor perpindahan bayangan pesawat terbang $\overrightarrow{OC}$ merupakan vektor proyeksi dari vektor perpindahan pesawat terbang $\overrightarrow{OA}$.

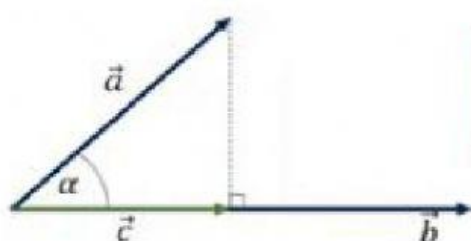


Proyeksi Ortogonal Suatu Vektor pada Vektor Lain

Selain menentukan besar sudut antara dua vektor, salah satu kegunaan dari Perkalian skalar dua vektor adalah untuk menentukan proyeksi ortogonal dari suatu vektor pada vektor lain.

a. Panjang Proyeksi dan Proyeksi Skalar Ortogonal

Proyeksi skalar ortogonal biasanya disingkat dengan proyeksi skalar saja atau sering dikatakan dengan panjang proyeksi vektor. Misalkan proyeksi $\overrightarrow{OA}$ pada $\overrightarrow{OB}$ adalah $\overrightarrow{OC}$



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$\vec{c}$ adalah proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{a}| \cos \alpha = |\vec{c}|$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cos \alpha$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$|\vec{c}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right|$$

□ Panjang proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\text{Panjang Proyeksi} = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right|$$

□ Panjang proyeksi $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

$$\text{Panjang Proyeksi} = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \right|$$

□ Proyeksi Skalar $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

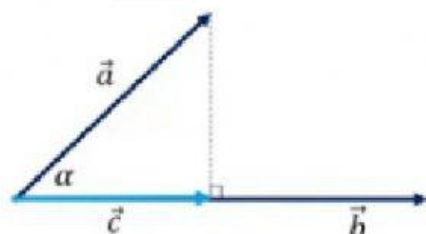
$$\text{Proyeksi skalar} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

□ Proyeksi Skalar $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

$$\text{Proyeksi skalar} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

b. Proyeksi vektor ortogonal

Vektor $\vec{c}$ searah vektor $\vec{b}$ ini berarti vektor satuan $\vec{c}$ sama dengan vektor satuan $\vec{b}$, yaitu $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$



$\vec{c}$ adalah proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\vec{c} = |\vec{c}| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

Vektor proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

Vektor proyeksi $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

CONTOH :

1). Diketahui vektor $\vec{a} = (2, -1, 3)$ dan vektor $\vec{b} = (-1, 2, -2)$. Tentukan :

- Proyeksi skalar $\vec{a}$ pada $\vec{b}$
- Proyeksi skalar $\vec{b}$ pada $\vec{a}$
- Proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$
- Proyeksi vektor $\vec{b}$ pada $\vec{a}$
- Panjang proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$
- Panjang proyeksi $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

Penyelesaian :

a). Proyeksi skalar $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\begin{aligned} \text{Proyeksi skalar} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \\ &= \frac{(2, -1, 3) \cdot (-1, 2, -2)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{-2 - 2 - 6}{3} \\ &= \frac{-10}{3} \end{aligned}$$

b). Proyeksi skalar $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

$$\begin{aligned}\text{Proyeksi skalar} &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \\&= \frac{(-1, 2, -2) \cdot (2, -1, 3)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \\&= \frac{-1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + -2 \cdot 3}{\sqrt{4 + 1 + 9}} \\&= \frac{-2 - 2 - 6}{\sqrt{14}} \\&= \frac{-10}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$

c). Proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\text{Proyeksi vektor} &= \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} \\&= \left(\frac{-10}{3^2} \right) (-1, 2, -2) \\&= \left(\frac{-10}{9} \right) (-1, 2, -2) \\&= \left(\frac{10}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{20}{9} \right)\end{aligned}$$

d). Proyeksi vektor $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

$$\begin{aligned}\text{Proyeksi vektor} &= \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} \\&= \left(\frac{-10}{(\sqrt{14})^2} \right) (2, -1, 3) \\&= \left(\frac{-10}{14} \right) (2, -1, 3) \\&= \left(\frac{-5}{7} \right) (2, -1, 3) \\&= \left(-\frac{10}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{15}{7} \right)\end{aligned}$$

e). Panjang proyeksi $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\text{Panjang proyeksi} &= \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right| \\ &= \left| \frac{-10}{3} \right| \\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

f). Panjang proyeksi $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

$$\begin{aligned}\text{Panjang proyeksi} &= \left| \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \right| \\ &= \left| \frac{-10}{\sqrt{14}} \right| \\ &= \frac{10}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$

Soal latihan

1. Diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Tentukan :

- Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$
- Proyeksi skalar ortogonal $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

Pembahasan :

Lengkapi yaa titik-titik di bawah ini

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \dots + \dots + \dots = \dots + \dots + \dots = \dots$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\dots + \dots + \dots} = \sqrt{\dots + \dots + \dots} = \sqrt{\dots} = \dots \sqrt{\dots}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\dots + \dots + \dots} = \sqrt{\dots + \dots + \dots} = \sqrt{\dots} = \dots$$

a. Proyeksi skalar ortogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

b. Proyeksi skalar ortogonal $\vec{b}$ pada $\vec{a}$

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{\dots}{\dots \sqrt{\dots}} = \frac{\dots}{\dots \sqrt{\dots}} \times \frac{\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}} = \dots \sqrt{\dots}$$



2. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik A(-2,-1), B(3,5), dan C(5,-1).

Tentukan panjang proyeksi vektor $\overrightarrow{AB}$ pada $\overrightarrow{AC}$

Pembahasan :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\dots + \dots} = \sqrt{\dots + \dots} = \sqrt{\dots} =$$

Proyeksi vektor $\overrightarrow{AB}$ pada $\overrightarrow{AC}$ yaitu $\overrightarrow{AD}$.

Panjang proyeksi vektor $\overrightarrow{AB}$ pada $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \dots$$



3. Tentukan proyeksi skalar ortogonal $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ jika $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ dan $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

Pembahasan :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\dots, \dots) \cdot (\dots, \dots) = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dots + \dots} = \sqrt{\dots + \dots} = \sqrt{\dots} =$$

Proyeksi skalar ortogonal $\vec{u}$ pada $\vec{v}$

$$= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\dots}{\dots}$$

4. Diketahui segitiga PQR dengan titik P(0,0,0), Q(0,2,2) dan R(2,2,0)

a. Tentukan proyeksi vektor ortogonal $\overrightarrow{PQ}$ pada $\overrightarrow{PR}$

b. Tentukan luas segitiga tersebut

Pembahasan :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots + \dots + \dots = \dots + \dots + \dots = \dots$$

a. Proyeksi vektor ortogonal $\overrightarrow{PQ}$ pada $\overrightarrow{PR}$ adalah $\overrightarrow{PS}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} &= \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PR}|^2} \overrightarrow{PR} = \frac{\dots}{(\sqrt{\dots + \dots + \dots})^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\dots}{\dots + \dots + \dots} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. $\overrightarrow{QS}$ merupakan garis tinggi segitiga PQR

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QS} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS} & |\overrightarrow{QS}| &= \sqrt{\dots + (\dots)^2 + (\dots)^2} = \sqrt{\dots + \dots + \dots} = \sqrt{\dots} \\ &= -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PS} & |\overrightarrow{PR}| &= \sqrt{\dots + \dots + \dots} = \sqrt{\dots + \dots + \dots} = \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots} \\ &= \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PQ} & \text{Luas segitiga PQR} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QS} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} & & = - \times \dots\sqrt{\dots} \times \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots} = \dots\sqrt{\dots} \end{aligned}$$

SELAMAT MENGERJAKAN

