

**LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK**  
**MATERI TRIGONOMETRI**  
**BAGIAN 3**

Nama :

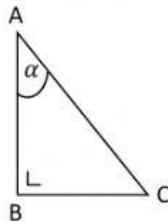
Kelas/No:

**C. Sudut-Sudut Berelasi**

**1. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Pertama**

Relasi sudut  $\alpha$  dan sudut  $(90^\circ - \alpha)$  pada kuadran I

Perhatikan gambar berikut!



- Besar  $\angle A$  + besar  $\angle B$  + besar  $\angle C$  adalah  $\dots^\circ$ .
- Jika  $\angle B = \dots^\circ$  maka  $\angle A + \angle C = 180^\circ - \dots^\circ = \dots^\circ$ .
- Jika  $\angle A = \alpha$  dan  $\angle A + \angle C = \dots^\circ$  maka  $\angle C = \dots^\circ - \alpha$

Maka

- $\sin \angle C = \sin (90^\circ - \alpha) = \frac{AB}{AC} = \cos \alpha$
- $\cos \angle C = \cos (\dots^\circ - \alpha) = \frac{\dots}{\dots} = \dots \alpha$
- $\tan \angle C = \tan (\dots^\circ - \alpha) = \frac{\dots}{\dots} = \dots \alpha$

**Kesimpulan :**

- $\sin (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
- $\cos (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
- $\tan (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$

Dengan mengikuti pola kesimpulan 1 – 3 dan atau dengan menyelidiki secara mandiri, maka dapat disimpulkan pula bahwa:

- $\sec (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
- $\operatorname{cosec} (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
- $\cotan (90^\circ - \alpha) = \dots \alpha$

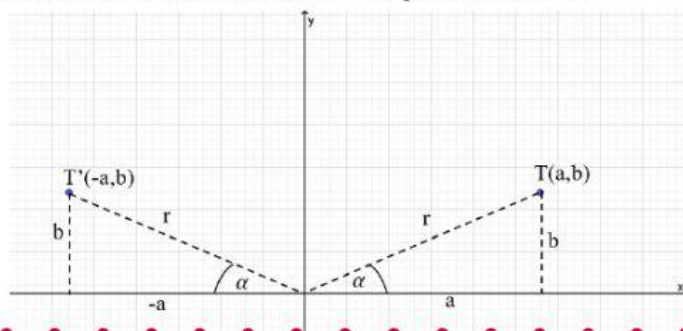
**Contoh penggunaan sudut relasi  $(90^\circ - \alpha)$  dalam perhitungan :**

Petunjuk : jawablah secara singkat pada kolom titik-titik dan pilihlah satu jawaban untuk hasil akhir.

- $\sin 30^\circ = \sin (90^\circ - \dots^\circ) = \cos \dots^\circ = \dots$   
 a. 0                      b.  $\frac{1}{2}$                       c.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$                       d.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$                       e. 1
- Jika diketahui  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{3}$ , maka nilai  $\operatorname{cosec} (90^\circ - \theta) = \dots$      $\theta = \dots$   
 a.  $\frac{3}{5}$                       b.  $\frac{3}{4}$                       c.  $\frac{4}{5}$                       d.  $\frac{5}{4}$                       e.  $\frac{5}{3}$

**2. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Kedua**

Relasi sudut  $\alpha$  dan sudut  $(180^\circ - \alpha)$  pada kuadran II



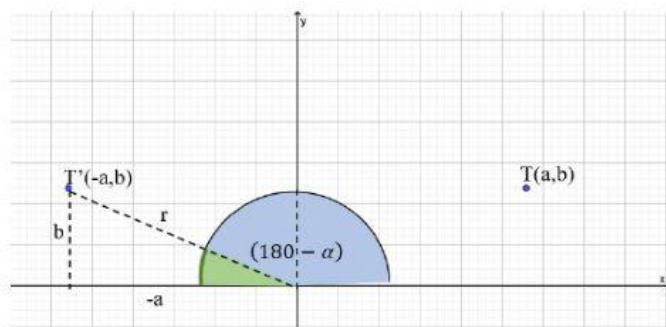
Pada Kuadran I,

$$\sin \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\cos \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\tan \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\cotan \alpha = \frac{\dots}{\dots}$$



Besar sudut daerah yang berwarna hijau adalah  $\alpha$  sesuai dengan gambar sebelumnya.

Relasi sudut  $(180 - \alpha)$  adalah daerah yang diarsir berwarna hijau.

Dengan memperhatikan gambar dan koordinat titik  $T'$ , maka:

$$\sin(180 - \alpha) = \frac{b}{r} = \frac{b}{r} = \sin \alpha$$

$$\cos(180 - \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos \alpha$$

$$\tan(180 - \alpha) = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a} = -\tan \alpha$$

**Kesimpulan :**

1.  $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$

2.  $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$

3.  $\tan(180 - \alpha) = -\tan \alpha$

Dengan mengikuti pola kesimpulan 1 – 3, maka dapat disimpulkan pula bahwa:

4.  $\sec(180 - \alpha) = -\sec \alpha$

5.  $\csc(180 - \alpha) = \csc \alpha$

6.  $\cotan(180 - \alpha) = -\cotan \alpha$

**Contoh penggunaan sudut relasi  $(180 - \alpha)$  dalam perhitungan :**

1.  $\tan 120^\circ = \tan(180 - \dots)^\circ = -\tan \dots^\circ = \dots$

a.  $\sqrt{3}$

b. 1

c.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d.  $-\sqrt{3}$

e.  $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

2. Bentuk sederhana dari  $\csc(90^\circ - \alpha) + \sec(180^\circ - \alpha) = \dots \alpha - \dots \alpha = \dots$

a.  $-2 \sec \alpha$

b.  $-2 \csc \alpha$

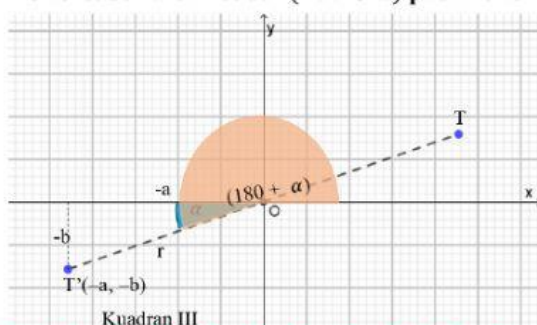
c. 0

d.  $2 \sec \alpha$

e.  $2 \csc \alpha$

### 3. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Ketiga

Relasi sudut  $\alpha$  dan sudut  $(180 + \alpha)$  pada kuadran III



Relasi sudut  $(180 + \alpha)$  adalah daerah yang berwarna biru.

$$\sin(180^\circ + \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \tan \alpha$$

**Kesimpulan :**

1.  $\sin (180^\circ + \alpha) = \dots \alpha$
2.  $\cos (180^\circ + \alpha) = \dots \alpha$
3.  $\tan (180^\circ + \alpha) = \dots \alpha$

**Contoh penggunaan sudut relasi  $(180^\circ + \alpha)$  dalam perhitungan :**

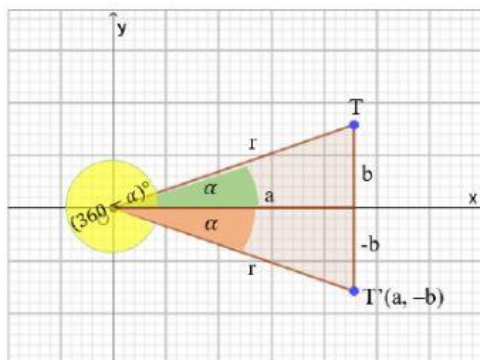
1.  $\tan 210^\circ = \tan (180 + \dots)^\circ = \tan \dots^\circ = \dots$   
a.  $-1$       b.  $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$       c.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$       d.  $\sqrt{3}$       e.  $1$
2. Nilai dari  $\sin 240^\circ + \cos 225^\circ$  adalah  $\dots$ .

Jawab :

$$\begin{aligned}\sin 240^\circ + \cos 225^\circ &= \sin \dots^\circ + \cos \dots^\circ \\ &= \dots^\circ \dots^\circ \\ &= a. \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad b. \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad c. -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= a. \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad b. -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \quad c. -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

**4. Perbandingan Trigonometri Sudut di Kuadran Keempat**

**Relasi sudut  $\alpha$  dan sudut  $(360^\circ - \alpha)$  pada kuadran IV**



Relasi sudut  $(360^\circ - \alpha)$  adalah sudut yang berwarna orange.

Dengan memperhatikan segitiga dengan sudut orange beserta koordinat  $T'$  dan perbandingan trigonometri di kuadran I, maka:

$$\sin (360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{r} = -\frac{b}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos (360^\circ - \alpha) = \frac{a}{r} = \dots \alpha$$

$$\tan (360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = \dots \alpha$$

**Kesimpulan :**

1.  $\sin (360^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
2.  $\cos (360^\circ - \alpha) = \dots \alpha$
3.  $\tan (360^\circ - \alpha) = \dots \alpha$

**Contoh penggunaan sudut relasi ( $360^\circ - \alpha$ ) dalam perhitungan :**

Petunjuk : pilih jawaban dengan menyentuh pada salah satu kotak (bagian bawah) untuk kemudian digeser dan diletakkan pada kotak kosong (bagian atas) yang sesuai dengan relasi sudutnya

|                  |   |                         |   |                      |   |                      |
|------------------|---|-------------------------|---|----------------------|---|----------------------|
| $\sin 330^\circ$ | = | $\sin (360 - 30)^\circ$ | = | <input type="text"/> | = | <input type="text"/> |
| $\cos 315^\circ$ | = | <input type="text"/>    | = | <input type="text"/> | = | <input type="text"/> |
| $\tan 300^\circ$ | = | <input type="text"/>    | = | $-\tan 60^\circ$     | = | <input type="text"/> |

$\cos 45^\circ$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan (360 - 60)^\circ$

$-\sin 30^\circ$

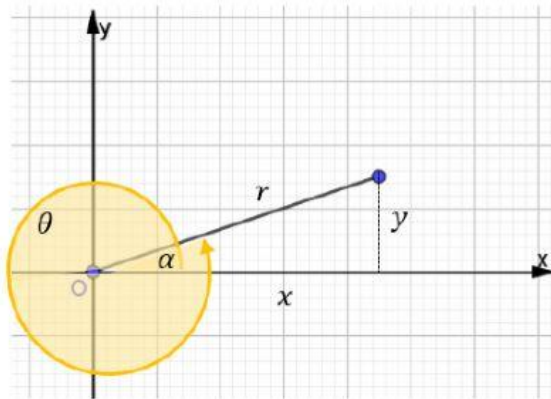
$-\sqrt{3}$

$\cos (360 - 45)^\circ$

$-\frac{1}{2}$

**5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut yang lebih dari  $360^\circ$**

Relasi sudut  $\alpha$  dan sudut  $(\alpha + n \times 360)$



Jika  $\theta = k.360^\circ + \alpha$ , dengan  $k$  merupakan bilangan bulat, maka

$$\sin (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\sec (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\cos (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\operatorname{cosec} (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\tan (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

$$\cotan (k.360^\circ + \alpha) = \dots \quad \alpha$$

**Contoh penggunaan sudut relasi  $(\alpha + n \times 360)$  dalam perhitungan :**

Petunjuk : jawablah secara singkat pada kolom titik-titik dan pilihlah satu jawaban untuk hasil akhir.

Tentukan nilai

1.  $\sec 930^\circ =$

2.  $\tan 1.500^\circ =$

3.  $\sin (-750^\circ) =$

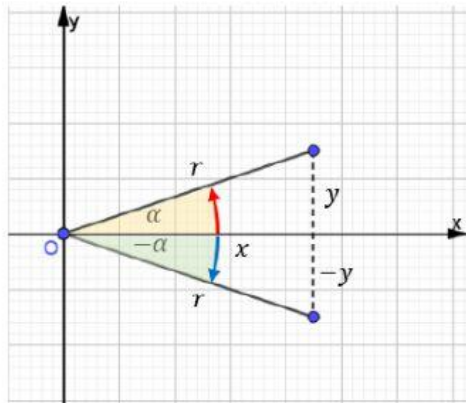


Jawab :

- $\sec 930^\circ = \sec ( \dots \cdot 360^\circ + \dots^\circ ) = \sec \dots^\circ = \sec (180 + \dots)^\circ = \dots = \dots$   
 a.  $-2$       b.  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$       c.  $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$       d.  $-\frac{1}{3}\sqrt{2}$       e.  $-\frac{1}{2}$
- $\tan 1.500^\circ = \tan ( \dots \cdot 360^\circ + \dots^\circ ) = \tan \dots^\circ = \dots$   
 a.  $-1$       b.  $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$       c.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$       d.  $-\sqrt{3}$       e.  $\sqrt{3}$

## 6. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Negatif

Relasi sudut  $\alpha$  dan sudut  $(-\alpha)$



Arah sudut  $(-\alpha)$  ... dengan arah jarum jam.

tentukan nilai :

$$\sin (-\alpha) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos (-\alpha) = \frac{x}{r} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\tan (-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \alpha$$

Kesimpulan :

- $\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos (-\alpha) = \cos \alpha$
- $\tan (-\alpha) = -\tan \alpha$

Contoh penggunaan relasi sudut  $\alpha$  dan sudut  $(-\alpha)$  dalam perhitungan :

Petunjuk : jawablah secara singkat pada kolom titik-titik dan pilihlah satu jawaban untuk hasil akhir.

- $\cos (-120)^\circ = \dots^\circ = \cos ( \dots^\circ ) = \dots^\circ = \dots$   
 a.  $-\frac{1}{2}$       b.  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$       c.  $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$       d.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$       e.  $\frac{1}{2}$
- $\sin (-240)^\circ = \dots^\circ = -\sin ( 180 + \dots^\circ ) = -(-\sin \dots^\circ) = \dots$   
 a.  $-\frac{1}{2}$       b.  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$       c.  $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$       d.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$       e.  $\frac{1}{2}$



## D. Identitas Trigonometri

### Bentuk-bentuk identitas trigonometri

#### 1. Kebalikan (perkalian)

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \sec \alpha \cdot \cos \alpha = 1$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \operatorname{cosec} \alpha \cdot \sin \alpha = 1$$

$$\cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Leftrightarrow \cotan \alpha \cdot \tan \alpha = 1$$

#### 2. Pembagian (perbandingan)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cotan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

#### 3. Kuadrat (Pythagoras)

Perhatikan kembali perbandingan untuk  $\sin \alpha$  dan  $\cos \alpha$  di atas.

didapat

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \cdot \sin \alpha \quad (\text{pers. 1})$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cdot \cos \alpha \quad (\text{pers. 2})$$

Berdasarkan teorema Pythagoras yang berlaku pada segitiga,

Dan dengan mensubstitusikan pers. 1 dan 2 ke rumus Pythagoras, didapat

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow (r \cdot \cos \alpha)^2 + (r \cdot \sin \alpha)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow r^2 \cdot \cos^2 \alpha + r^2 \cdot \sin^2 \alpha &= r^2 \\ \Leftrightarrow r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= r^2 \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \quad (\text{kedua ruas dibagi dengan } r^2) \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \quad (\text{penjumlahan bersifat komutatif}) \end{aligned}$$

Bentuk tersebut diatas merupakan persamaan trigonometri yang selalu bernilai benar untuk setiap  $\alpha$ .

Jika kita membagi persamaan  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  dengan  $\sin^2 \alpha$ , maka akan kita dapatkan bentuk identitas yang lain.

$$1 + \cotan^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

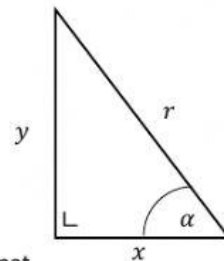
Jika kita membagi persamaan  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  dengan  $\cos^2 \alpha$ , maka akan kita dapatkan bentuk identitas yang lain.

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

### Contoh penggunaan identitas trigonometri

#### 1. Buktikan bahwa :

a.  $(1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) = \tan^2 x$



b.  $(\cos x + \sin x)^2 - 1 = 2 \sin x \cdot \cos x$

c.  $\cos A \cotan A = \operatorname{cosec} A - \sin A$

Jawab :

1. a. Akan dibuktikan bahwa  $(1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) = \tan^2 x$

Ingat.

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2 x)(1 - \cos^2 x) &= \sec^2 x \cdot \sin^2 x \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x \\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \tan^2 x \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

- b. Akan dibuktikan bahwa  $(\cos x + \sin x)^2 - 1 = 2 \sin x \cdot \cos x$

Ingat.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

maka

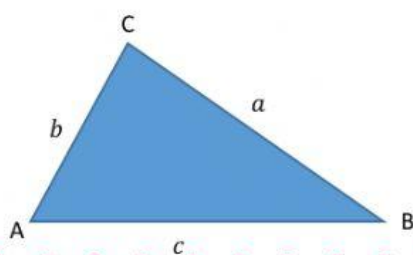
$$\begin{aligned} (\cos x + \sin x)^2 - 1 &= \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x - 1 \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 1 \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x + 1 - 1 \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

- c. Akan dibuktikan bahwa  $\cos A \cotan A = \operatorname{cosec} A - \sin A$

$$\begin{aligned} \cos A \cdot \cotan A &= \cos A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \\ &= \frac{1 - \sin^2 A}{\sin A} \\ &= \frac{1}{\sin A} - \frac{\sin^2 A}{\sin A} \\ &= \operatorname{cosec} A - \sin A \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

## E. Aturan Sinus dan Kosinus

Perhatikan gambar!



Sisi  $a$  terletak di depan  $\angle A$ .

Sisi  $b$  terletak di depan  $\angle B$ .

Sisi  $c$  terletak di depan  $\angle C$ .

Untuk sembarang segitiga ABC dengan panjang sisi-sisi  $a, b$ , dan  $c$  serta  $\angle A, \angle B$ , dan  $\angle C$  berlaku:

### 1. Aturan Sinus

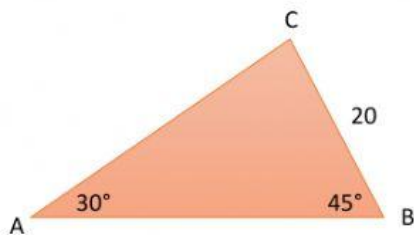
$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

#### Soal E1:

- Pada segitiga ABC diketahui  $\angle A = 30^\circ, \angle B = 45^\circ$ , dan  $AC = 20$  cm. Tentukan besar  $\angle C$  dan panjang AC!
- Pada segitiga KLM diketahui  $KL = 12\sqrt{3}$  cm,  $LM = 12$  cm, dan  $\angle K = 30^\circ$ . Tentukan unsur sisi-sisi dan sudut-sudut yang belum diketahui pada segitiga KLM tersebut!

Jawab:

- Sketsa terlebih dahulu segitiga ABC beserta ukuran sisi dan besar sudut yang diketahui.



$$\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

$$\frac{\sin \angle A}{BC} = \frac{\sin \angle B}{AC}$$

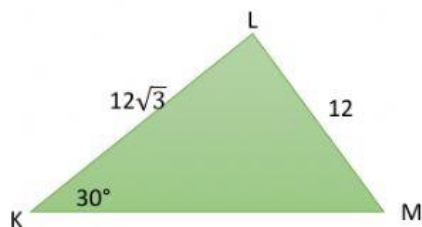
$$\frac{\sin 30^\circ}{BC} = \frac{\sin 45^\circ}{20}$$

$$BC = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$BC = \frac{20 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$AC = \frac{20 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

- Sketsa terlebih dahulu segitiga KLM beserta ukuran sisi dan besar sudut yang diketahui.



$$\frac{\sin \angle K}{LM} = \frac{\sin \angle M}{KL}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{12} = \frac{\sin \angle M}{12\sqrt{3}}$$

$$\sin \angle M = \frac{12\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \angle M = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle M = 60^\circ$$

$$\angle L = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

$$\angle L = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

$$\frac{\sin \angle K}{KM} = \frac{\sin \angle L}{KL}$$

$$KM = \frac{12 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{12 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 6 \text{ cm}$$

### 2. Aturan Kosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$$

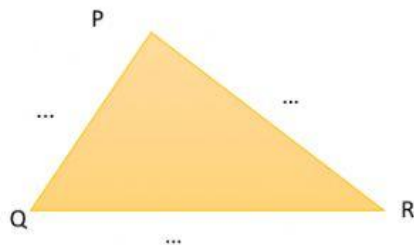
#### Soal E2:

- Pada segitiga PQR diketahui  $PQ = 4$  cm,  $PR = 5$  cm, dan  $QR = 6$  cm. Tentukan nilai  $\cos \angle Q$ !

2. Sebuah pesawat pengintai terbang dengan arah jurusan tiga angka  $030^\circ$  dan menempuh jarak 40 km. Kemudian pilot membelokkan arah pesawat sehingga pesawat menuju arah  $090^\circ$ . Pada arah yang baru, pesawat menempuh jarak 60 km. Tentukan jarak pesawat tersebut dari posisi mula-mula!

Jawab:

1. Sketsa terlebih dahulu segitiga PQR beserta ukuran sisi dan besar sudut yang diketahui.



$$q^2 = p^2 + r^2 - 2pr \cos \angle Q$$

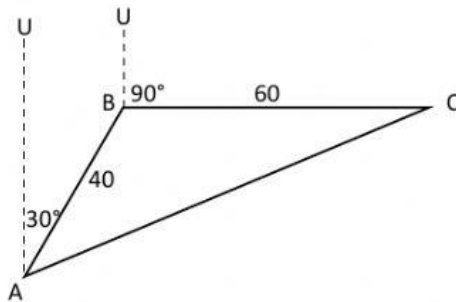
$$\angle Q = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2.p.r}$$

$$\angle Q = \frac{2^2 + 2^2 - 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\angle Q = \frac{+ -}{-}$$

$$\angle Q = -$$

2. Sketsa terlebih dahulu perjalanan kapal.



Jurusan tiga angka adalah besar sudut yang dimulai dari arah utara dan bergerak searah jarum jam.

$$\angle ABC = 90^\circ + 30^\circ = \quad^\circ$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

$$AC^2 = \quad^2 + \quad^2 - 2 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cos \quad^\circ$$

$$AC^2 = \quad + \quad - \quad (---)$$

$$AC^2 =$$

$$AC = \sqrt{\quad} = \sqrt{\quad}$$

### 3. Luas Segitiga

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin \angle C$$

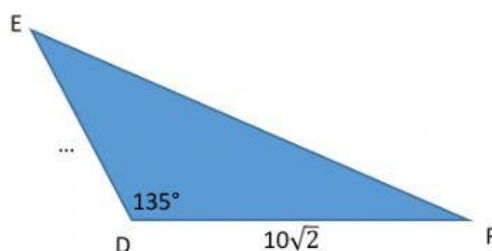
$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin \angle A$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin \angle B$$

**Soal E3:**

1. Pada segitiga DEF diketahui  $DE = 12$  cm,  $DF = 10\sqrt{2}$  cm, dan  $\angle D = 135^\circ$ . Tentukan Luas segitiga DEF!

Jawab:



$$\text{Luas } \triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \sin \angle$$

$$\text{Luas } \triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \sin \quad^\circ$$

$$\text{Luas } \triangle DEF = \sqrt{\quad} \cdot \sqrt{\quad}$$

$$\text{Luas } \triangle DEF = \quad \text{cm}^2$$