



Martes 26 de enero 2021

3° de Secundaria Matemáticas



Método de las diferencias

Aprendizaje esperado: Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el *enésimo* término de una sucesión.

Énfasis: Obtener una expresión general cuadrática utilizando el método de las diferencias.

¿Qué vamos a aprender?

El adjetivo *enésimo* se aplica a lo que ocupa el sitio “n” en una sucesión.

El propósito de la sesión es: obtener una expresión general cuadrática para definir el *enésimo* término de una sucesión por el método de las diferencias.

¿Qué hacemos?

Posición n	Término de la sucesión
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

Primera diferencia

Observa la siguiente tabla.

La tabla muestra los valores que le corresponden a los términos de la sucesión cuando “n” es 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente.

Al obtener las diferencias que existen en los valores de los términos de la sucesión, observas que la diferencia que existe de 1 a 4 es igual a 3; de 4 a 9 es igual a 5; de 9 a 16 es igual a 7; de 16 a 25 es igual a 9, y de 25 a 36 es igual a 11.

Ya que tienes las diferencias, ahora debes obtener una segunda diferencia, pues se requiere llegar a encontrar una cantidad que sea constante.

Cómo puedes observar, la segunda diferencia es constante, para este caso fue el número 2, esto significa que la sucesión es una expresión de segundo grado.

Y en este ejemplo, la expresión que la representa es: “n” al cuadrado

Esto quiere decir que, para obtener cualquier término de la sucesión, lo único que tienes que hacer es multiplicar por sí mismo la posición de “n”.

Es decir, que, si “n” fuera 11, lo que tendría que hacer es multiplicar 11 por 11 para obtener el término de la sucesión. Y entonces el término de la sucesión valdría 121.

Observa otro ejemplo.

n^2

Posición n	Término de la sucesión
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

Primera diferencia

Segunda diferencia

Tienes la siguiente tabla donde se muestra que, cuando la posición es 1, es decir, “n” es igual a 1, el término de la sucesión vale 2; cuando la “n” es 2, el término de la sucesión vale 6; cuando n es igual a 3, el término de la sucesión es 12; cuando n es 4, el término de la sucesión vale 20; cuando n es igual a 5, el término de la sucesión es 30, y cuando n es igual a 6, el término de la sucesión vale 42.

En la sucesión

Posición <i>n</i>	Término de la sucesión
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42

¿Cuánto vale el término de la sucesión cuando “n” vale 10?

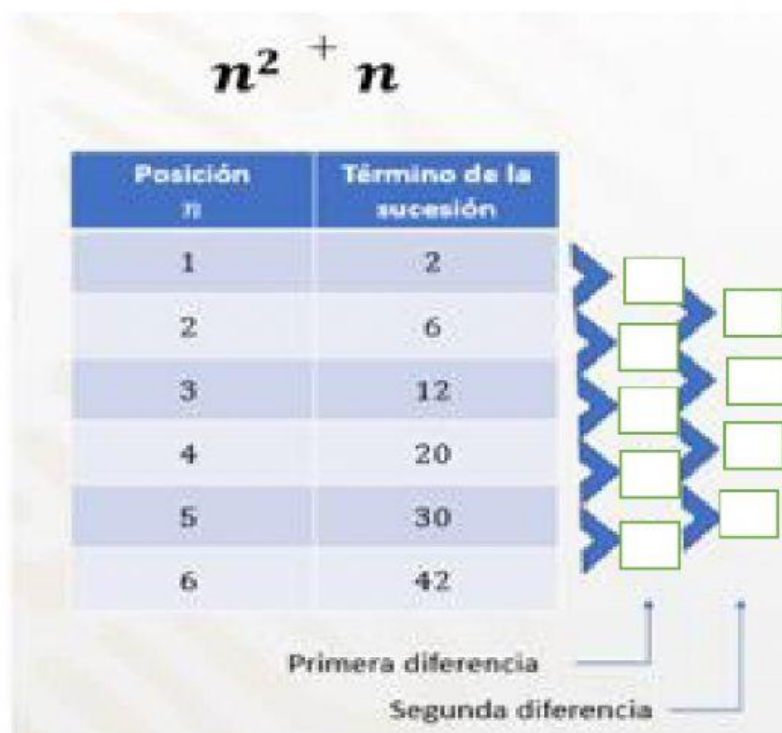
Cuando “n” vale 10 el término de la sucesión es 100.

¿Qué piensas sobre esa respuesta? La respuesta es... incorrecta.

Si tu respuesta fue 100 debes tener una ficha roja. Pero, analiza para comprobar la respuesta.

Realiza lo que hiciste al inicio, comienza calculando las primeras diferencias.

Las diferencias que existen entre los términos de la sucesión son:



Entonces, como la segunda diferencia es constante, significa que esta sucesión **es una expresión de segundo grado.**

Entonces, si ya sabes que es una expresión de segundo grado o cuadrática, ¿qué faltaría, para obtener el valor del término de la sucesión?

Faltaría sumarle el mismo número del término de la posición.

Por lo tanto, la expresión quedaría expresada como: “n” al cuadrado más “n”.

¿Cuál sería el valor del término de la sucesión cuando “n” vale 10?

Quedaría expresado como 10 al cuadrado más 10, es decir, 10 por 10 más 10.

$$n^2 + n$$

$$(10)^2 + 10 =$$

$$100 + 10 = 110$$

Entonces, ¿cuál sería el valor del término de la sucesión?

Sería 110, porque si multiplicas, 10 por 10 es igual a 100, más 10, obtienes dicho valor.

Analiza las siguientes situaciones sobre el *n*ésimo término, con la finalidad de que lo desarrolles por el método de las diferencias.

Situación 1.

Un grupo de estudiantes de tercer grado de la escuela secundaria técnica número 1, de Tlaxcala estudian para un examen; están trabajando con sucesiones de números enteros. Ellos desean determinar la expresión del *n*ésimo término de una sucesión.

Ayúdalos a determinar la expresión algebraica que modela esta situación. Calcula las diferencias entre los términos, si se requieren dos niveles de diferencias, se trata de una expresión cuadrática, y sólo requieres saber qué otra operación se agrega.

Observa ¿cuál sería el término para la posición 5? Es decir, “*n*” es igual a 5.

¿Cuál sería el término para la posición 5?

Posición <i>n</i>	1	2	3	4	5
Término de la sucesión	3	12	27	48	?

Si sabes que cuando “*n*” es 1, el término de la sucesión vale 3, cuando “*n*” es 2, el término de la sucesión vale 12, para 3 es 27 y para 4 es 48.

Inicia calculando una primera diferencia entre los términos de la sucesión. Entre 3 y 12 la diferencia es 9; entre 12 y 27 la diferencia es 15, y entre 27 y 48 la diferencia es 21.

¿Cuál sería el término para la posición 5?

Posición n	1	2	3	4	5
Término de la sucesión	3	12	27	48	

A partir de estos resultados, obtienes una segunda diferencia, es decir, entre 9 y 15 la diferencia es 6, y entre 15 y 21 también la diferencia es 6.

Pero, ¿cómo lo resolviste?

Después de multiplicar por sí mismo el valor de "n", se multiplica por 3.

Ahora verifica con todos los valores de "n".

$$(n^2)(3)$$

Para $n = 1$

$$(1^2)(3) = 3$$

Para $n = 3$

$$(3^2)(3) = 27$$

Para $n = 5$

$$(3^2)(3) = 75$$

Para $n = 2$

$$(2^2)(3) = 12$$

Para $n = 4$

$$(4^2)(3) = 48$$

¿Cuál es el término de la sucesión para la posición 10?

Cabe resaltar lo siguiente: si la última diferencia obtenida es dos, será "n" al cuadrado la parte cuadrática, si la última diferencia es 6 como en este ejemplo, será 3 "n" cuadrada.

Eso qué quiere decir, que el coeficiente de la "n" al cuadrado en una sucesión cuadrática corresponde a la mitad de la última diferencia. Esto te ayuda a poder calcular con mayor efectividad la expresión cuadrática que estás buscando.

Situación 2.

Un segundo ejercicio donde tuvieron duda los alumnos de tercer grado de la secundaria técnica 1, fue el siguiente.

De la sucesión 7, 21, 43, 73, 111, 157... desean obtener la expresión algebraica del n -ésimo término por el método de diferencias.

Determina el n -ésimo término de la sucesión

7, 21, 43, 73, 111, 157, ...

¿Qué término de la sucesión le corresponde la posición 18?

Los alumnos desean saber: ¿qué término de la sucesión le corresponde la posición 18?

Trabajarás un método matemático que te permitirá obtener cualquier expresión algebraica para encontrar el n -ésimo de cualquier sucesión cuadrática llamado "método de diferencias".

A partir de la expresión algebraica general, que es " ax " al cuadrado más " bx ", más " c ", vas a representar una sucesión cuadrática, pero en términos de sucesión utilizarás la letra " n " en lugar de " x ".

Determina el n -ésimo término de una sucesión

Expresión algebraica de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c$$

Expresión algebraica general en una sucesión cuadrática:

$$an^2 + bn + c$$

Como lo que harás es encontrar el n -ésimo término, entonces queda como " a " al cuadrado más " bn " más " c ".

Analiza la siguiente tabla para saber cómo obtener el n -ésimo término. Los valores para la primera posición, en este caso, la posición 1, son:

Determina el n -ésimo término de una sucesión

Valor de n	1	2	3
$an^2 + bn + c$	$a + b + c$	$4a + 2b + c$	$9a + 3b + c$
1ª diferencia	$3a + b$	$5a + b$	$7a + b$
2ª diferencia	$2a$	$2a$	$2a$

$$an^2 + bn + c$$

"a" + "b" + "c" que es igual al primer término de la sucesión.

La primera diferencia siempre va a ser igual a "3a" + "b", y

"2a" va a ser igual a la segunda diferencia.

Lo que tendrías que hacer sería encontrar el valor de las tres incógnitas.

Determina la primera diferencia de la sucesión, una vez que la tengas, determina la segunda diferencia.

Determina el enésimo término de una sucesión

1	2	3	4	5	6
7,	21,	43,	73,	111,	157 ...
	14	22	30	38	46
	8	8	8	8	

Ya que tengas determinadas ambas diferencias y si es constante la segunda diferencia, sabes entonces que se trata de una ecuación cuadrática, por lo que vas a trabajar con el modelo matemático.

Determina el enésimo término de una sucesión cuando $n =$ 

1	2	3	4	5	6
7,	21,	43,	73,	111,	157...
	14	22	30	38	46
	8	8	8	8	

Valor de n	1
$an^2 + bn + c$	$a + b + c$
1a. diferencia	$3a + b$
2a. diferencia	$2a$

$4 + 2 + 1 = 7$
$3(4) + 2 = 14$
$2(4) = 8$

$a + b + c = 7$

$3a + b = 14$

$2a = 8$

Se despeja "a" de la ecuación $2a = 8$

$$a = \boxed{}$$

Se despeja "b" de: $3a + b = 14$

$$b = \boxed{}$$

Se despeja "c" de $a + b + c = 7$

$$c = \boxed{}$$

Por lo tanto,

$$a = 4, b = 2 \text{ y } c = 1$$

Expresión algebraica

$$4n^2 + 2n + 1$$

Para $n = 1$

$$4n^2 + 2n + 1 = 4(1)^2 + 2(1) + 1$$

$$4(1) + 2(1) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

Para $n = 3$

$$4n^2 + 2n + 1 = 4(3)^2 + 2(3) + 1$$

$$4(9) + 2(3) + 1 = 36 + 6 + 1 = \boxed{}$$

Con esto, puedes responder a los alumnos de la secundaria Técnica No. 1 de Tlaxcala ¿qué término de la sucesión le corresponde la posición 18?

Analizaste en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.

También conociste que, para saber si una expresión es cuadrática, puedes emplear el método de las diferencias, por el cual, si en la segunda diferencia los valores son constantes estás hablando de una expresión cuadrática.

Debes encontrar el valor de los coeficientes "a", "b" y "c" de la expresión general de una sucesión. La suma de "a + b + c" corresponde al primer término de la sucesión; que "3a + b" corresponde a la primera diferencia del segundo y del primer término de la sucesión, y para "2a", va a ser igual a la segunda diferencia que es una constante.

$$an^2 + bn + c$$

$$a + b + c$$

Corresponde al valor del primer término de la sucesión

$$3a + b$$

Corresponde al valor de la primera diferencia entre el segundo y primer términos

$$2a$$

Corresponde al valor de la segunda diferencia