Demostraciones de las propiedades de la potencia

1. $[(a,b)]^n \otimes [(c,d)]^n = ([(a,b)] \otimes [(c,d)])^n$

Respuesta:

$([(a,b)] \otimes [(c,d)])^n = [(ac,bd)]^n$,		Por definición de la potenciación en los números racionales.
$[(ac,bd)]^n = [((ac)^n,(bd)^n)]$,	Por definición de la potenciación en los números racionales.	
$[((ac)^n,(bd)^n)] = [(a^n c^n, b^n d^n)]$,		Distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación en los números naturales.
$[(a^n c^n, b^n d^n)] = [(a^n,b^n)] \otimes [(c^n,d^n)]$	Por definición de la multiplicación en los números racionales.	
$[(a^n,b^n)] \otimes [(c^n,d^n)] = [(a,b)]^n \otimes [(c,d)]^n$		Por definición de la multiplicación en los números racionales.

2. $[(a,b)]^n \otimes [(a,b)]^m = ([(a,b)])^{n+m}$

Respuesta:

$[(a,b)]^n \otimes [(a,b)]^m = [(a^n,b^n)] \otimes [(a^m,b^m)]$	Por definición de la potenciación en los números racionales.
$[(a^n,b^n)] \otimes [(a^m,b^m)] = [(a^n a^m, b^n b^m)]$	Por definición de la potenciación en los números racionales.
$[(a^n a^m, b^n b^m)] = [(a^{n+m}, b^{n+m})]$	Por definición de la multiplicación en los números racionales.
$[(a^{n+m}, b^{n+m})] = ([(a,b)])^{n+m}$	Por $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ en los números naturales

3. $[(a,b)]^n \div [(a,b)]^m = ([(a,b)])^{n-m}$ Si $n \geq m$

Respuesta:

De izquierda a derecha:

$[(a,b)]^n \div [(a,b)]^m = [(a,b)]^n \otimes [(b,a)]^m$	Por definición de multiplicación en los números racionales.
$[(a,b)]^n \otimes [(b,a)]^m = [(a^n,b^n)] \otimes [(b^m,a^m)]$	Por $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ en los números naturales.
$[(a^n,b^n)] \otimes [(b^m,a^m)] = [(a^n b^m, b^n a^m)]$	Por definición de multiplicación en los números racionales.
$[(a^n b^m, b^n a^m)] = [(a^n b^m, a^m b^n)]$	Por definición de la potenciación en los números racionales.
$[(a^n b^m, a^m b^n)] = [(a^n,a^m)] \otimes [(b^m,b^n)]$	Por definición de la división en los números racionales.
$[(a^n,a^m)] \otimes [(b^m,b^n)] = [(a^n,a^m)] \div [(b^n,b^m)]$	Por definición de la división en los números racionales.
$[(a^n,a^m)] \div [(b^n,b^m)] = [(a^{n-m},b^{n-m})]$	Por definición de la potenciación en los números racionales.
$[(a^{n-m},b^{n-m})] = ([(a,b)])^{n-m}$	Por la propiedad conmutativa de la multiplicación en los números naturales.

4. $([(a,b)]^n)^m = ([(a,b)])^{nm}$

Respuesta:

$([(a,b)]^n)^m = [(a^n),(b^n)]^m$		Propiedad de la potenciación de los racionales.
$[(a^n),(b^n)]^m = [(a^n)^m,(b^n)^m]$		Inv. Propiedad de la potenciación sobre los racionales.
$[(a^n)^m,(b^n)^m] = [(a^{nm}),(b^{nm})]$	Propiedad de la potenciación sobre los naturales.	
$[(a^{nm}),(b^{nm})] = ([(a,b)])^{nm}$		Propiedad de la potenciación de los racionales.

5. Existencia del elemento idéntico para la multiplicación

$[(a,b)] \otimes [(x,y)] = [(a,b)]$

$[(a,b)] \otimes [(x,y)] = [(ax),(by)]$ D. equivalencia entre racionales.

Si $[(ax),(by)] = [(a,b)]$ entonces $((ax),(by)) \approx (a,b)$ D.de igualdad entre Q+

$(ax)b = a(by)$ Def. multiplicación de racionales.

$(xa)b = a(by)$ Sustitución de racionales.

$x(ab) = (ab)y$ P. Asociativa de la multiplicación.
$x(ab) = y(ab)$ P. Conmutativa de la multiplicación entre naturales.
$x = y$ P. Cancelativa a izquierda de la multiplicación de naturales.

$[(x,y)] = [(y,y)]$ P. Conmutativa de la multiplicación entre naturales.

Luego el elemento neutro es la familia única de $[(y,y)]$

6. Existencia del elemento idéntico para la suma de racionales

$[(a,b)] \oplus [(x,y)] = [(a,b)]$	Se supone su veracidad.	
$[(ay+bx, by)] = [(a,b)]$		Distributiva de la multiplicación.
$(ay+bx, by) \approx (a,b)$	Def. igualdad.	
$(ay+bx)b = a(by)$	Def. equivalencia entre racionales.	
$ayb + bbx = aby$		Def. suma de racionales.
$aby + bbx = aby$	Conmutatividad de la multiplicación.	
$bbx = 0$		Suma de naturales.
$x = \frac{0}{bb}$	Propiedad cancelativa de la multiplicación.	
$x = 0$	Propiedad $[(0,a)] = [(0)]$	

Luego se sustituye en la ecuación de equivalencia.

$(ay + b0)b = a(by)$	P. sustitución de los naturales.	
$(ay)b = a(by)$	D. multiplicación de naturales.	

Luego a, b, y pueden ser cualquier natural distinto de 0 lo que nos deja con: $[(0,y)]$

Tenemos entonces $[(a,b) \oplus (0,y)] = [(a,b)]$

$[(ay+0b, by)] = [(a,b)]$	D. suma de racionales.	
$[(ay+0, by)] = [(a,b)]$		Propiedad conmutativa de la multiplicación de naturales.
$[(ay, by)] = [(a,b)]$ D.		Cancelativa con respecto a la suma.
$(ay, by) \approx (a,b)$D.	Igualdad de fracciones.	
$ayb = aby$	Definición relación de equivalencia entre fracciones.	
$ayb = ayb$		D. Multiplicación de naturales.
$[(a,b) \oplus (0,y)] = [(a,b)]$	Aplicando los pasos invertidos.	