dad Departamento de Aplicación Docente	**Matemática IV**	Profesoras: • Eugenia Tonidandel • Silvina Mozas • Vanina Iannizzotto
Cursos: 4° año	Tema: **PARTE B:** **POLINOMIOS : FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS (PARTE B)**	Año: 2020

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS (PARTE A)

PARTE B:

Factor Común – Factor Común En grupos

Trinomio Cuadrado Perfecto – Cuatrinomio Cubo Perfecto

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios primos

Para factorizar polinomios existen varios casos:

I) **Factor común**: 👈

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$$\underbrace{a(b \pm c) = a.b \pm a.c}_{\text{Se realizó propiedad distributiva}} \quad (el\ factor\ a\ se\ repite\ en\ ambos\ términos)$$

- **Para extraer factor común, se debe proceder de manera inversa:**

$$\underbrace{a.b \pm a.c}_{\text{Se extrajo factor común}} = a.(b \pm c)$$

Procedimiento:

1° Paso: Buscamos el **factor común** (será el MCD de los términos del polinomio: **El mayor número que divide a todos los coeficientes**)

2° Paso: Se expresa el **polinomio dado** como el producto del **factor común** extraído por el polinomio que resulta de dividir el polinomio dado por el factor común

Por Ejemplo:

$12x^3 - 8x^5 + 20x^2 = 4x^2\ (3x - 2x^3 + 5)$

- $4x^2$ es el mayor divisor por el que se puede dividir todos los términos
- $(3x - 2x^3 + 5)$ es el resultado de: $\frac{12x^3}{4x^2} - \frac{8x^5}{4x^2} + \frac{20x^2}{4x^2}$

Ejercitación:

1) Extraer factor común de los siguientes polinomios y ubicar el resultado donde corresponda

a) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^5 =$

b) $Q(x) = 24x^2 - 36x + 48 =$

c) $R(x) = -20x^7 - 25x^5 - 15x^8 =$

d) $S(x) = -\frac{3}{4}x^4 - \frac{9}{10}x^3 - \frac{9}{4}x^2 =$

Respuestas:

$\frac{3}{2}x^2(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{2})$

$5x^5 . (-4x^2 - 5 - 3x^3)$

$12 . (2x^2 - 3x - 4)$

$x^3 . (2x + 5 - 3x^2)$

Normalización de Polinomios:

Para normalizar un polinomio, se debe ***sacar factor común el coeficiente principal***. De este modo nos aseguramos que en la nueva expresión el polinomio resulta un polinomio **MÓNICO**, ya que su coeficiente principal será 1.

Por ejemplo:

$$P(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \quad P(x) = 2.\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{1/3}{2}\right) \Rightarrow \quad P(x) = 2.\left(x^2 - \frac{1}{6}\right)$$

Polinomio mónico normalizado

II) Factor común por grupos:

Se aplica el factor común por grupos a polinomios que no tienen un factor común en todos sus términos. El número de términos del polinomio debe ser par.

Por Ejemplo: Por lo general se agrupan por mayores exponente, o bien, según los coeficientes

$Q(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10 =$ Agrupamos por mayores exponente

$(7x^5 - 5x^4) + (14x - 10) =$ Sacamos factor común en cada grupo

$x^4(7x - 5) + 2(7x - 5) =$ **Siempre deben quedar paréntesis iguales**

$(7x - 5) . (x^4 + 2)$ Sacamos factor común el paréntesis igual

Procedimiento

1° Paso: Se forman grupos de igual cantidad de términos que tengan factor común, se aplica factor común en cada uno de los grupos.

2° Paso: Debe quedar un paréntesis común.

3° Paso: Se extrae dicho paréntesis como factor común

Ejercitación:

1) Extraer factor común en grupos de los siguientes polinomios y unir con flechas según corresponda:

$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 3$ =

$Q(x) = x^4 - x^3 + x - 1$

$R(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 4$

$S(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^1 - \frac{1}{2}x^2$

- $\frac{1}{2}x \cdot (\frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{2} - x)$
- $(x + 2) \cdot (x^5 + x^3 + 2)$
- $(x^3 + 1) \cdot (x - 1)$
- $(2x - 1) \cdot (2x^2 + 3)$
- **Ninguna es correcta**

III) Trinomio Cuadrado Perfecto:

Dado un trinomio, ***será trinomio cuadrado perfecto*** cuando pueda expresarse como un ***cuadrado de binomio.*** Se basa en los desarrollos del producto especial visto anteriormente: *el cuadrado de un binomio*

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Procedimiento:

1°Paso: Se reconocen los cuadrados perfectos, los cuales no deben tener un signo negativo adelante. Se calcula sus raíces cuadradas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso: Se calcula el doble producto de sus bases; y se verifica que el doble producto figure en el trinomio dado.

3° Paso: Si el doble producto figura en el trinomio dado, entonces decimos que es un Trinomio Cuadrado Perfecto; luego se factoriza como el cuadrado de un binomio, formado por dichas bases.

$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$ → Cuadrado de un binomio: Expresión factorizada del trinomio Cuadrado perfecto.

Trinomio cuadrado perfecto: desarrollo del binomio

Por ejemplo: $T(x) = x^2 + 6x + 9 \rightarrow T(x) = (x+3)^2$ o $T(x) = (-x-3)^2$

x ; 3 ; $2.x.3$

Ambos términos tienen igual signo

Por ejemplo: $T(x) = x^2 - 6x + 9 \rightarrow T(x) = (x-3)^2$ o $T(x) = (-x+3)^2$

x ; 3 ; $2.x.3$

Ambos términos tienen distinto signos

OBSERVACIONES:

- **Si el doble producto que figura en el *"Trinomio dado"* es positivo**, entonces las bases del Cuadrado del Binomio **tendrán el mismo signo**.
- **Si el doble producto que figura en el *"Trinomio dado"* es negativo**, entonces las bases del Cuadrado del Binomio **tendrán signos opuestos.**

Ejercitación:

1) **Expresar cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio y tildar aquellos resultados que sean correctos:**

a) P(x)= $4x^2 - 4x + 1$ = **$(-2x - 1)^2$** ☐

b) S(x)= $x^6 + 4x^3 + 4$ = **$(x^3 + 2)^2$** ☐

c) T(x)= $x^2 + \frac{9}{4} + 3x$ = **$(-x - \frac{3}{2})^2$** ☐

IV) Cuatrinomio Cubo Perfecto: 👈

Dado un **cuatrinomio**, será ***cuatrinomio cubo perfecto*** cuando pueda expresarse como un ***cubo de binomio***. Se basa en los desarrollos del producto especial visto anteriormente: *el cubo de un binomio*

Signos iguales en el cuatrinomio, implica signos iguales en el cubo de binomio

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$
$$-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = (-a - b)^3$$

Dos casos de signos diferentes en el cuatrinomio. Otro caso "NO ES CUATRINOMIO CUBO PERFECTO!

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$
$$-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3 = (-a + b)^3$$

Procedimiento:

1°Paso: Se reconocen los cubos perfectos. Se calculan sus raíces cúbicas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso: Se calcula:

- El triple producto del cuadrado de la primera base por la segunda
- El triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda
- Se comparan estos cálculos con los del cuatrinomio dado.

3° Paso: Si estos cálculos figuran en el trinomio dado, entonces decimos que es un Cuatrinomio Cubo Perfecto; y luego se factoriza como el cubo de un binomio, formado por dichas bases.

$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$ → **Cubo de un binomio**: Expresión factorizada

Cuatrinomio cubo perfecto: Es el desarrollo del cubo del binomio.

Por ejemplo 1: $M(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} \rightarrow M(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^3$

x ; $-\frac{1}{3}$

$3.x^2.\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\quad 3.x.\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

Por ejemplo 2: $P(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} \rightarrow P(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

x ; $\frac{1}{3}$

$3.x^2.\left(\frac{1}{3}\right)$ $\quad 3.x.\left(\frac{1}{3}\right)^2$

Por ejemplo 3: $P(x) = -x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} \rightarrow P(x) = \left(-x + \frac{1}{3}\right)^3$

$-x$; $\frac{1}{3}$

$3.x^2.\left(\frac{1}{3}\right)$ $\quad 3.(-x).\left(\frac{1}{3}\right)^2$

Por ejemplo 4: $P(x) = -x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} \rightarrow P(x) = \left(-x - \frac{1}{3}\right)^3$

$-x$; $-\frac{1}{3}$

$3.(-x)^2.\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\quad 3.(-x).\left(-\frac{1}{3}\right)^2$

Ejercitación :

Expresa cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio y marca V o F según corresponda:

a) D(x)= $x^3 + 125 + 15x^2 + 75x$ = **(x + 5)** ^{2} V F

b) P(x)= $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$ = **(- x + 4)** ^{3} V F

c) T(x)= $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 1 + \frac{3}{2}x$ = **($\frac{1}{2}$ x + 1)** ^{3} V F

d) R(x)= $-x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ = **(- x + $\frac{1}{2}$)** ^{3} V F

V) Diferencia de Cuadrados:

Se basa en la siguiente fórmula:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Procedimiento:

1° Paso: Se identifica la resta de dos cuadrados (debe haber un solo signo negativo). Los cuadrados deben ser perfectos.

2° Paso: Se calculan las bases de los cuadrados perfectos (haciendo la raíz cuadrada de cada uno)

3° Paso: Se transforma la diferencia de cuadrados en un producto de binomios conjugados, formados por dichas bases.

Por ejemplo: P(x) = $x^2 - 25$ P(x)= $(x + 5)(x - 5)$

$\sqrt{x^2}$ = x $\sqrt{25}$ = 5

Ejercitación:

Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $x^2 - 4 =$ **c)** $x^4 - 9 =$

b) $64x^2 - 81 =$ **d)** $x^2 - \frac{49}{121} =$

Respuestas:

a) (x – 2) . (x + 2) **b) (8 x – 9) . (8 x + 9)**

c) (x^2 – 3) . (x^2 + 3) **d) (x - $\frac{7}{11}$) . (x + $\frac{7}{11}$)**

VI) Suma o Diferencia de Potencias de igual exponente:

Son polinomios de la forma: $x^n + a^n$ o $x^n - a^n$

Estos polinomios se factorizan usando la suma o diferencia de las bases según sean.

Para un polinomio de la forma $P(x) = x^n \pm a^n$ existen cuatro posibilidades:

$P(x) = x^n \pm a^n$ (n es par)

$P(x) = x^n \pm a^n$ (n es impar)

Todas las posibilidades se resumen en la siguiente tabla:

$x^n + a^n$	Si n es impar	$x^n + a^n$ es divisible por x+a y por lo tanto $x^n + a^n = (x+a)C(x)$ donde C(x) es el cociente de la división Ejemplos: $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$ $x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4)$
	Si n es par	$x^n + a^n$ no es divisible por x+a ni por x - a pues el resto de la división es R ≠ 0 en ambos casos Excepción : Si n no es potencia exacta de 2, se le puede considerar como múltiplo de un impar en cuyo caso se le puede factorear como suma de potencias de grado impar Ejemplo: $x^6 + a^6 = (x^2)^3+(a^2)^3 = (x^2+a^2)(x^4-x^2a^2+a^4)$
$x^n - a^n$	Si n es impar	$x^n - a^n$ es divisible por x - a y por lo tanto $x^n - a^n = (x - a)C(x)$ donde C(x) es el cociente de la división Ejemplos: $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$ $x^5 - a^5 = (x-a)(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4)$
	Si n es par	$x^n - a^n$ es divisible por x + a y por x- a $x^n - a^n = (x+a) . C_1(x)$ $x^n - a^n = (x-a) . C_2(x)$ Ejemplo: $X^4 - a^4 = (x-a) C_1 (x) = (x+a) C_2(x)$ Observe que en este caso es más conveniente factorear como diferencia de cuadrados $X^4 - a^4 = (x^2+a^2)(x^2-a^2) = (x^2+a^2)(x+a)(x-a)$

Por ejemplo: $P(x) = x^3 - 27 = x^3 - 3^3$

Se buscan las raíces de $P(x)$: $x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3$

Por el teorema del resto: $P(3) = 0 \rightarrow (x-3)$ *es divisor de* $P(x)$

Se aplica la Regla de Ruffini:

$(x^3 - 27) : (x - 3)$ $\qquad$ $(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) : (x + 2)$

	1	0	0	-27
3		3	9	27
	1	3	9	0

$$\boldsymbol{P(x) = x^3 - 27 = (x-3).(x^2 + 3x + 9)}$$

$\boldsymbol{P(x) = x^n \pm a^n}$		Divisor /es
n *impar*	$x^n + a^n$	$\boldsymbol{(x + a)}$
	$x^n - a^n$	$\boldsymbol{(x - a)}$
n *par*	$x^n - a^n$	$\boldsymbol{(x + a).(x - a)}$ **(se usa diferencia de cuadrados)**
	$x^n + a^n$	$\boldsymbol{se\ divide\ por\ (x - a) y\ por}$

1) Factorizar los siguientes polinomios a través de la suma y resta de potencias de igual exponente, y arrastra la respuesta correcta:

a) P(x)= $x^7 + 1$ $\qquad$ c) T(x)= $x^3 - 64$

b) (x)= $x^5 - \frac{1}{32}$ $\qquad$ d) R(x)= $x^3 + \frac{1}{125}$

Respuestas:

a) $(x + 1) . (x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ $\qquad$ **b)** $(x - 4).(x^2 + 4x + 16)$

b) $(x - \frac{1}{5}) . (x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16})$ $\qquad$ **c)** $(x + \frac{1}{5}) . (1x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{125})$