

ECUACIONES CUADRÁTICAS II

1. Definición

Una ecuación se llama de **segundo grado** o **cuadrática** cuando después de simplificar adopta la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde: **a, b y c** son coeficientes.

Observación



Si **a, b y c** son diferentes de cero, la ecuación se llama **completa** y si **b o c**, o ambos, son ceros, la ecuación se llama **incompleta**; **a** no puede ser cero, porque entonces, dejaría de ser una ecuación de segundo grado.

Así, dada la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

Si $b \neq 0$; $c \neq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ } Ec. completa

Si $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$

Si $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$

Si $b = c = 0 \Rightarrow ax^2 = 0$

} Ecuaciones incompletas

2. Resolución de una ecuación de segundo grado

En general, una ecuación de segundo grado con una incógnita puede resolverse:

- Por medio de la factorización, siempre que la factorización sea posible.
- Empleando la fórmula general.

A. Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Para resolver una ecuación cuadrática por medio de la factorización se recomienda lo siguiente:

- Se trasladan todos los términos a un solo miembro, de modo que en el otro miembro quede cero.
- Se factoriza la expresión simplificada.
- Se iguala cada factor a cero de donde se obtienen las raíces o soluciones.

Ejemplo 1: Resolver $x^2 + 10x + 21 = 0$

Resolución:

Factorizando el primer miembro:

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$(x + 3)(x + 7) = 0$$

Igualemos cada factor a cero

$$i) x + 3 = 0$$

$$ii) x + 7 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -7$$

Luego, el conjunto solución de la ecuación es: C.S. = $\{-3; -7\}$

¡ Atención !



Para comprobar las soluciones reemplazamos en la ecuación:

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

* Para $x = -3$

$$(-3)^2 + 10(-3) + 21 = 0$$

$$9 - 30 + 21 = 0$$

$$0 = 0 \quad (\text{cumple})$$

* Para $x = -7$

$$(-7)^2 + 10(-7) + 21 = 0$$

$$49 - 70 + 21 = 0$$

$$0 = 0 \quad (\text{cumple})$$

Ejemplo 2: Resolver $6(x^2 - 1) = -5x$

Resolución:

➡ Pasando todo al primer miembro:

$$6(x^2 - 1) = -5x$$

$$6x^2 - 6 = -5x$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0$$

➡ Factorizamos el primer miembro:

$$6x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(2x + 3)(3x - 2) = 0$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & \times & 3 \\ 3x & \times & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 9x \\ -4x \end{array} \Rightarrow \frac{5x}{5x}$$

$$(2x + 3)(3x - 2) = 0$$

➡ Igualando cada factor a cero:

$$i) 2x + 3 = 0$$

$$ii) 3x - 2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

Luego:

El conjunto solución de la

ecuación es: C.S. = $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right\}$

Ejemplo 3: Resolver $(x+4)(x-3) = 8$

Resolución:

➡ Efectuamos el producto y pasamos el 8 al primer miembro:

$$(x+4)(x-3) = 8$$

$$x^2 + x - 12 = 8$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

➡ Factorizamos el primer miembro:

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$(x+5)(x-4) = 0$$

➡ Igualamos cada factor a cero:

$$i) x + 5 = 0$$

$$ii) x - 4 = 0$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 4$$

∴ El conjunto solución de la ecuación es C.S. = $\{-5; 4\}$

B. Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general

Este procedimiento es recomendable cuando la factorización no es posible.

Para deducir esta fórmula, se transforma el primer miembro en un cuadrado perfecto. Así:

Dada la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

Pasamos c al segundo miembro: $ax^2 + bx = -c$

Multiplicamos por $4a$ a ambos miembros: $4a(ax^2) + 4a(bx) = 4a(-c)$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumamos b^2 a ambos miembros. $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Factorizamos el primer miembro $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Extrayendo la raíz cuadrada $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

Despejando la incógnita $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Luego, las dos raíces o soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Primera solución)

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Segunda solución)

Ejemplo 1: Resolver: $3x^2 - 10x + 5 = 0$

Resolución:

Comparando la ecuación dada $3x^2 - 10x + 5 = 0$, con la forma $ax^2 + bx + c = 0$;

obtenemos que: $a = 3$; $b = -10$ y $c = 5$

Reemplazamos estos valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obtenemos:

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)} = \frac{10 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5 + \sqrt{10}}{3} \\ x_2 = \frac{5 - \sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

El conjunto solución de la ecuación

$$\text{es C.S.} = \left\{ \frac{5 + \sqrt{10}}{3}, \frac{5 - \sqrt{10}}{3} \right\}$$

Ejemplo 2: Resolver: $2x^2 + 5x - 12 = 0$

Resolución:

En la ecuación $2x^2 + 5x - 12 = 0$, que es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$,

se deduce que: $a = 2$; $b = 5$ y $c = -12$.

Reemplazamos estos valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obtenemos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{-5 - 11}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

El conjunto solución de la ecuación

$$\text{es C.S.} = \left\{ \frac{3}{2}, -4 \right\}$$

Ejemplo 3: Resolver: $\frac{x-3}{x-2} + \frac{x+1}{x+5} = 4$

Resolución:

En primer lugar, reducimos la ecuación hasta llevarlo a la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{x-3}{x-2} + \frac{x+1}{x+5} = 4 \quad \text{MCM} = (x-2)(x+5)$$

$$(x-3)(x+5) + (x-2)(x+1) = 4(x-2)(x+5)$$

$$x^2 + 2x - 15 + x^2 - x - 2 = 4(x^2 + 3x - 10)$$

$$2x^2 + x - 17 = 4x^2 + 12x - 40$$

$$-2x^2 - 11x + 23 = 0$$

Multiplicando ambos miembros por -1 : $2x^2 + 11x - 23 = 0$

Comparando con la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$, encontramos que: $a = 2$; $b = 11$ y $c = -23$

Reemplazamos estos valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ecuaciones cuadráticas

1. Resuelve:

$$x^2 - 16 = 0$$

- a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

2. Calcula el valor negativo para "x", de modo que cumpla la siguiente igualdad.

$$100 - x^2 = 0$$

- a. 8 b. 10 c. 6 d. -8 e. -10

3. Calcula el mayor valor de "x" en:

$$(x - 5)(x - 8) = 0$$

- a. 5 b. 6 c. 7 d. 8 e. 4

4. Resuelve :

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

- a. {1;2} c. {2;4} e. {3;4}
b. {2;3} d. {1;5}

5. Resuelve:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

- a. {3;6} c. {3;4} e. {4;2}
b. {1;5} d. {2;5}

6. Determina el conjunto solución en :

$$x^2 + 9 = 0$$

- a. {-3;3} c. R e. $\emptyset$
b. {1;2} d. {-2;1}

7. Resuelve:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

- a. 1 b. 0 c. -1 d. -2 e. 5

8. Determina el conjunto solución en :

$$x^2 + 12x + 35 = 0$$

- a. {-5;7} c. $\emptyset$ e. {-5;-7}
b. {5;7} d. {5;-7}

9. Calcula el mayor valor de "x" en la siguiente ecuación:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

- a. 2 b. -1 c. 0 d. 1 e. -2

10. Resuelve de cada una de las siguientes ecuaciones, aplicando el factor común monomio.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a. $x^2 - 5x = 0$ | a. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| b. $x^2 + 4x = 0$ | b. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| c. $x^2 - 9x = 0$ | c. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| d. $x^2 + 6x = 0$ | d. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| e. $x^2 - 10x = 0$ | e. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| f. $x^2 + 8x = 0$ | f. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| g. $x^2 - 15x = 0$ | g. $x_1 =$ $x_2 =$ |

11. Resuelve de cada una de las siguientes ecuaciones, aplicando diferencia de cuadrados.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a. $x^2 - 4 = 0$ | a. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| b. $x^2 - 25 = 0$ | b. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| c. $x^2 - 100 = 0$ | c. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| d. $x^2 - 64 = 0$ | d. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| e. $x^2 - 121 = 0$ | e. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| f. $x^2 - 169 = 0$ | f. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| g. $x^2 - 225 = 0$ | g. $x_1 =$ $x_2 =$ |

12. Resuelve de cada una de las siguientes ecuaciones, aplicando el método de aspa simple.

- | | |
|-------------------------|--------------------|
| a. $x^2 + 8x + 15 = 0$ | a. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| b. $x^2 - 4x + 3 = 0$ | b. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| c. $x^2 + 15x + 54 = 0$ | c. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| d. $x^2 - 10x + 21 = 0$ | d. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| e. $x^2 + 6x + 8 = 0$ | e. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| f. $x^2 - 7x - 18 = 0$ | f. $x_1 =$ $x_2 =$ |
| g. $x^2 - 4x - 45 = 0$ | g. $x_1 =$ $x_2 =$ |