FUNCIÓN CUADRÁTICA: FORMA POLINÓMICA - FACTORIZADA - CANÓNICA

Habíamos visto que….

FORMA "POLINÓMICA"

de la Función Cuadrática:

$$f(x) = \overbrace{\underbrace{a}_{\text{Coeficiente Cuadrático o Principal}} . x^2}^{\text{Término Cuadrático o Principal}} + \overbrace{\underbrace{b}_{\text{Coeficiente Lineal}} . x}^{\text{Término Lineal}} + \overbrace{c}^{\text{Término Independiente}}$$

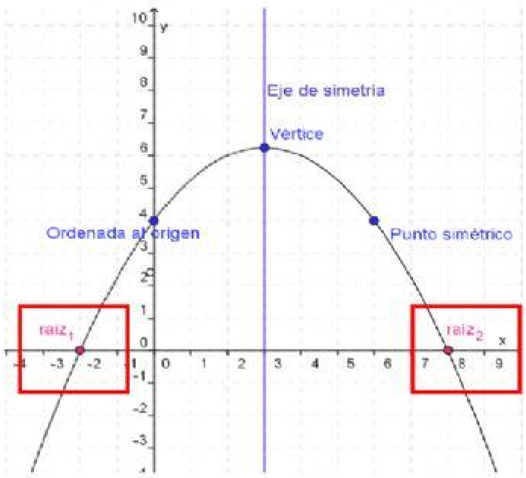
(a, b y c son números reales y $a \neq 0$)

- **$a \neq 0$ (Si "a" fuera cero, no sería una Función Cuadrática)**

CON ESTA FORMA POLINÓMICA PODEMOS CALCULAR:

👉 **Raíces de la función Cuadrática:**

Las raíces gráficamente son los puntos de intersección de la Parábola con el eje X, es decir los valores de x que hacen cero a la función (f(x) = 0)



En este caso las raíces son: $x_1 = -2$ y $x_2 = 8$

Pero… ¿Cómo se calculan estos puntos a partir de la Función Cuadrática en forma Polinómica?

Las raíces de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + b\,x + c$ se calculan mediante la **fórmula resolvente**:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Por ejemplo:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

YA TENEMOS LA ORDENADA AL ORIGEN (Donde la parábola corta al eje Y)

YA SABEMOS QUE LAS RAMAS DE LA PARÁBOLA SERÁN HACIA ARRIBA (Por ser positivo el coeficiente principal)

Los coeficientes de los términos de la función son: a = 2 b = - 8 c = 6

Reemplazamos los coeficientes en la fórmula:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x_1; x_2 = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - (4.2.6)}}{2.2}$$

$$x_1; x_2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4}$$

$$x_1; x_2 = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4}$$

$$x_1; x_2 = \frac{8 \pm 4}{4}$$

$$x_1 = \frac{8-4}{4} \boxed{= 1}$$

$$x_2 = \frac{8+4}{4} \boxed{= 3}$$

AHORA VEREMOS DOS NUEVAS FORMAS DE ESCRIBIR A UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA:

- **PASAR DE FORMA POLINÓMICA A FORMA FACTORIZADA:**

Si una función cuadrática tiene raíces reales x_1 y x_2 ya sean iguales o distintas, su fórmula puede expresarse en **FORMA FACTORIZADA**, así:

RAÍCES REALES ENCONTRADAS CON LA FÓRMULA RESOLVENTE

$$\underbrace{f(x) = a.x^2 + b.x + c}_{\text{FORMA POLINÓMICA}} \qquad \underbrace{f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)}_{\text{FORMA FACTORIZADA}}$$

Por ejemplo:

Dada la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x - 5$ en Forma Polinómica, pasar a Forma Factorizada:

1) Se deben encontrar las raíces $x_1; x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

$$x_1; x_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - (4.1.(-5))}}{2.1}$$

$$x_1; x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$x_1; x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x_1; x_2 = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{4 - 6}{2} \boxed{= -1}$$

$$x_2 = \frac{4 + 6}{2} \boxed{= 5}$$

2) Se reemplazan las raíces obtenidas en la FORMA FACTORIZADA y también el coeficiente principal:

$$f(x) = 1\,x^2 - 4x - 5 \text{ Forma Polinómica}$$

Coeficiente Cuadrático o Principal, el mismo que en la forma Polinómica

Una de las raíces (Cualquiera de ellas) cambiada de signo "OPUESTA"

Otra de las raíces cambiada de signo "OPUESTA"

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

$$f(x) = 1.(x + 1).(x - 5) \text{ Forma Factorizada}$$

Ejercitación:

Pasar de Forma Polinómica a Forma Factorizada:

1) **Seleccionar la opción correcta:**

a) Forma Polinómica: $y = -x^2 + 4$ ⟶ Forma Factorizada **y =** .... (x ....) . (x ....)

b) Forma Polinómica: $y = -3.x^2 + 4.x - 1$ ⟶ Forma Factorizada **y =** .... (x ....) . (x ....)

- **PASAR DE FORMA FACTORIZADA A FORMA POLINÓMICA:**

Se debe desarrollar la propiedad DISTRIBUTIVA

Por ejemplo:

Dada la función cuadrática en forma Factorizada $f(x) = -2 \cdot (x-1) \cdot (x+3)$, pasar a forma Polinómica:

1) **Distribuir el coeficiente principal con el primer paréntesis.**

$f(x) = -2 \cdot (x-1) \cdot (x+3) =$

$= (-2x + 2) \cdot (x+3) =$

2) **El resultado, distribuirlo con el segundo paréntesis.**

$= \quad (-2x + 2) \cdot (x+3) =$

$= \ -2x^2 - 6x + 2x + 6 =$

3) **Operar con términos semejantes**

$= \ -2x^2 \underbrace{- 6x + 2x}_{} + 6 =$

$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$ **Forma Polinómica**

Ejercitación:

Pasar de Forma Factorizada a Forma Polinómica:

2) **Seleccionar la opción correcta:**

a) Forma Factorizada: $y = -3 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$ $\longrightarrow$ la Forma Polinómica es:

$y = -3x^2 + 9x + 6$ $\qquad$ $y = 3x^2 + 3x + 6$ $\qquad$ $y = -3x^2 + 3x + 6$

b) Forma Factorizada : $y = 2 \cdot (x-2) \cdot (x+4)$ $\longrightarrow$ la Forma Polinómica es:

$y = 2x^2 + 4x - 16$ $\qquad$ $y = 2x^2 - 4x - 16$ $\qquad$ $y = 2x^2 + 4x + 16$

PASAR DE FORMA POLINÓMICA A FORMA CANÓNICA:

Si conocemos las coordenadas del vértice de una función cuadrática, su fórmula puede expresarse en **forma canónica**, así: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$ **Donde x_v e y_v son las coordenadas del vértice.**

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c \qquad\qquad f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$$

FORMA POLINÓMICA $\qquad$ **FORMA CANÓNICA**

Por ejemplo:

Dada la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x - 5$ en Forma Polinómica, pasar a Forma Canónica:

Se deben encontrar la coordenadas del vértice con la fórmula $x_v = \frac{-b}{2.a}$

$$x_v = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_v = f(x_v) = f(2) = 2^2 - 4.2 - 5 = -9$$

1) **Se reemplazan las coordenadas obtenidas en la FORMA CANÓNICA y también el coeficiente principal:**

$$f(x) = 1\,x^2 - 4x - 5$$ **Forma Polinómica**

Coeficiente Cuadrático o Principal, el mismo que en la forma Polinómica

Se reemplaza la coordenada x_v cambiando el signo "OPUESTA"

Se reemplaza la coordenada y_v con el mismo signo.

$$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$$

$$f(x) = 1.(x - 2) \quad -9$$ **Forma Canónica**

Ejercitación:

Pasar de Forma Polinómica a Forma Canónica:

1) **Seleccionar la opción correcta:**

a) **Forma Polinómica:** $y = -x^2 + 4$ ⟶ **Forma Canónica** $y =$ ……. . (x …….)^2 ……….

b) **Forma Polinómica:** $y = 2x^2 - 12x + 16$ ⟶ **Forma Canónica** $y =$ ……. . (x …….)^2 ……….

- ## PASAR DE FORMA CANÓNICA A FORMA POLINÓMICA:

Se debe desarrollar el CUADRADO DE UN BINOMIO, luego DISTRIBUTIVA del coeficiente principal y por último operar con términos semejantes:

Por ejemplo:

Dada la función cuadrática en forma Canónica $f(x) = -2 . (x - 1)^2 + 3$, pasar a forma Polinómica:

1) **Realizar el cuadrado de un binomio.**

$f(x) = -2 . (x - 1)^2 + 3 =$

$= -2 . (x^2 - 2x + 1) + 3 =$

2) **Distribuir el coeficiente principal con el resultado anterior.**

$$= -2 \, . \, (x^2 - 2x + 1) + 3$$

3) **Operar con términos semejantes**

$$= -2x^2 + 4x - 2 + 3 =$$

$$= -2x^2 + 4x + 1 =$$

$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ **Forma Polinómica**

__Ejercitación:__

Pasar de Forma Canónica a Forma Polinómica:

3) **Seleccionar la opción correcta:**

c) Forma Canónica: $y = -3 \, . \, (x+1)^2 + 2 \longrightarrow$ la Forma Polinómica es:

$y = -3x^2 - 9x + 2$ $\qquad$ $y = -3x^2 - 6x + 5$ $\qquad$ $y = -3x^2 - 6x - 1$

d) Forma Canónica : $y = 2 \, . \, (x-2)^2 - 5 \longrightarrow$ la Forma Polinómica es:

$y = 2x^2 - 8x - 5$ $\qquad$ $y = -8x + 2x^2 + 3$ $\qquad$ $y = 3 - 2x^2 - 8x$

- __PASAR DE FORMA FACTORIZADA A FORMA CANÓNICA:__

En la forma Factorizada podemos apreciar el coeficiente principal y las raíces:

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

- a es el coeficiente principal
- X_1 es una raíz (opuesta a la que aparece en la fórmula)
- X_2 es otra raíz (opuesta a la que aparece en la fórmula)

Debemos llegar a la forma Canónica:

$$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$$

- a es el coeficiente principal
- X_v es la coordenada x del vértice (Será opuesta en la que aparece en la fórmula)
- Y_v La coordenada y del vértice. Con igual signo.

Para pasar a Canónica se deben encontrar la coordenadas del vértice con la fórmula $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y_v = f(x_v)$

__Por ejemplo:__

Dada la función cuadrática en forma Factorizada $f(x) = -2 \, . \, (x-1) \, . \, (x+3)$ **, pasar a forma Canónica:**

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$X_v = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$Y_v = f(x_v) = f(-1) = (-1)^2 - 4.(-1) - 5 = 0$$

2) Se reemplazan las coordenadas obtenidas en la FORMA CANÓNICA y también el coeficiente principal:

$f(x) = -2 . (x - 1) . (x + 3)$ **Forma Factorizada**

Coeficiente Cuadrático o Principal, el mismo que en la forma Polinómica

Se reemplaza la coordenada x_v cambiando el signo "OPUESTA"

Se reemplaza la coordenada y_v con el mismo signo.

$$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$$

$$f(x) = 1.(x - 1) \underbrace{+\,0}_{\text{Puede no colocarse}}$$ **Forma Canónica**

Ejercitación:

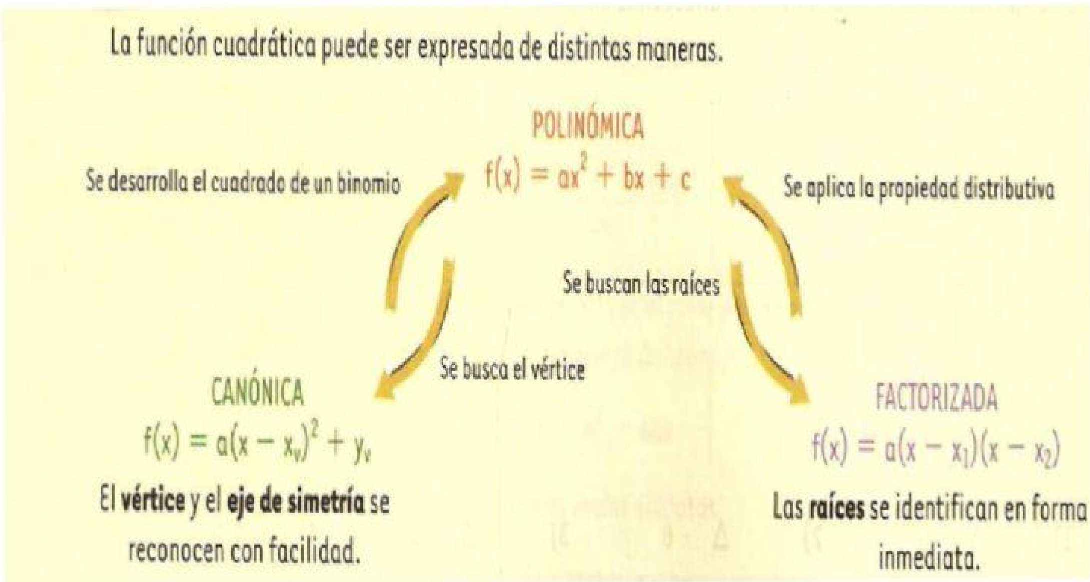
Pasar de Forma Factorizada a Forma Canónica:

2) **Seleccionar la opción correcta:**

c) Forma Polinómica: $y = -3\,(x + 1).(x - 3)$ ⟶ Forma Canónica $y =$ .... $(x$ ....$)^2$ ....

d) Forma Polinómica: $y = -\,(x - 1).(x + 5)$ ⟶ Forma Canónica $y =$ .... $(x$ ....$)^2$ ....

En Resumen:



1) **Completar la siguiente tabla:**

Fórmula	Vértice de la parábola	Eje de simetría
$y = (x+2)^2 - 3$	V=(……… ;………)	X=…………………
$y = -2(x+1)^2$	V=(……… ;………)	X=…………………
$y = -(x-1)^2 - 1$	V=(……… ;………)	X=…………………
$y = -2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	V=(……… ;………)	X=…………………

2) **Marcar en la siguiente tabla las respuestas correctas:**

Fórmula	Raíces de la función	Eje de simetría
$y = (x+2).(x+5)$		
$y = -2(x-3).(x+2)$		
$y = -(x+2).(x-4)$		
$y = \frac{1}{3}(x+6).(x-1)$		

3) **Unir con flechas cada una de las siguientes funciones en la forma que se pide:**

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, en forma canónica es:	$f(x) = 2x^2 - 12x + 16$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-3)$, en forma Polinómica es:	$f(x) = -1\,(x+1).(x-3)$
c) $f(x) = 2(x-3)^2 - 2$, en forma polinómica es:	$f(x) = 3\,.\,(x-1)^2 - 12$
d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, en forma factorizada es:	$f(x) = 1\,.\,(x-2)^2 - 1$
e) $f(x) = 3\,(x-3)\,(x+1)$, en forma canónica es:	Ninguna