경북 2학년 기하	3. 공간도형과공간좌표 3-1-3. 삼수선의 정리	**2020년 9월 둘째주**	학번	이름

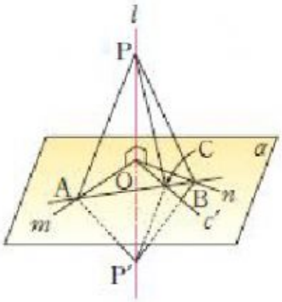
[중요한 정리]

교과서p110예제2)

직선 l이 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n의 교점 O를 지나고 m, n과 각각 수직이면 $l \perp \alpha$임을 보이시오.

(풀이)

평면 α 위의 임의의 직선 c에 대하여 점 O를 지나면서 직선 c에 평행한 직선을 c'이라 하고, 평면 α 위에서 세 직선 m, n, c'과 점 O 이외의 점에서 만나는 직선을 그어 그 교점을 차례로 A, B, C라고 하자.



직선 l 위에 $\overline{OP}=\overline{OP'}$인 서로 다른 두 점 P, P'을 잡으면 두 직선 m, n은 모두 선분 PP'의 $\boxed{\quad}$이므로

$\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\overline{BP}=\overline{BP'}$

또 $\overline{AB}$는 공통이므로 $\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$

따라서 $\angle PAC = \angle P'AC$

$\overline{AC}$는 공통이므로 $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$

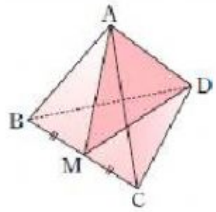
따라서 $\overline{CP}=\overline{CP'}$

즉, 삼각형 PCP'은 $\boxed{\quad}$이고 점 O는 $\overline{PP'}$의 $\boxed{\quad}$이다.

$\overline{PP'} \perp \overline{OC}$, 즉 $l \perp c'$이므로 $l \perp c$ 따라서 $l \perp \alpha$

[생각해보기]

오른쪽 그림의 정사면체 ABCD에서 모서리 BC의 중점을 M이라고 할 때, 다음이 성립함을 보이시오.



(1) $\overline{BC} \perp$(평면 AMD)

① $\triangle ABC$가 $\boxed{\quad}$이므로 $\overline{BC} \perp \overline{\boxed{\quad}}$

② $\triangle BCD$도 $\boxed{\quad}$이므로 $\overline{BC} \perp \overline{\boxed{\quad}}$

①, ②에 의해 $\overline{BC} \perp$ 평면 $\boxed{\quad}$

(2) $\overline{BC} \perp \overline{AD}$

(1)에 의해 $\overline{BC} \perp$(평면 AMD)이므로

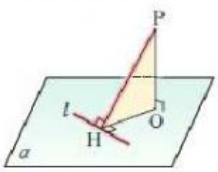
평면 AMD위의 모든 직선과 $\boxed{\quad}$이다.

즉, $\overline{BC} \perp \overline{AD}$

[삼수선의 정리]

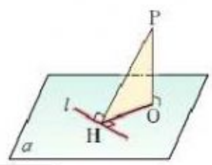
평면 α위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 한 점 O에 대하여

① $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$이면



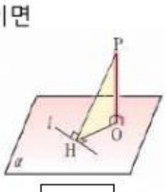
$l \perp \overline{\boxed{\quad}}$

② $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$이면



$l \perp \overline{\boxed{\quad}}$

③ $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$이면



$\overline{PO} \perp$ $\boxed{\quad}$

[정리]

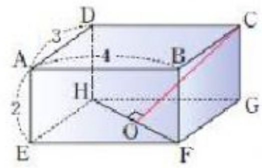
❶ $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$이면 $\overline{PH} \perp l$

❷ $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$이면 $\overline{OH} \perp l$

❸ $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$이면 $\overline{PO} \perp \alpha$

[문제1]

오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=2$이다. 꼭짓점 C에서 $\overline{FH}$에 내린 수선의 발을 O라고 할 때, 선분 CO의 길이를 구하시오.



(풀이)

$\overline{CG} \perp$ 평면 $\boxed{\quad}$, $\overline{CO} \perp \overline{FH}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{GO}\ \boxed{\quad}\ \overline{FH}$

삼각형 FGH는 $\overline{FH}=\boxed{\quad}$인 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2}\overline{FH} \times \overline{GO} = \frac{1}{2}\overline{FG} \times \overline{GH} = \frac{1}{2} \times \boxed{\quad} \times \boxed{\quad}$

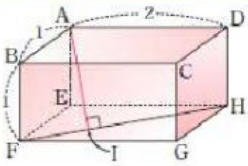
$\overline{GO} == \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$

따라서 직각삼각형 COG에서

$\overline{CO} = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{GO}^2} = \frac{\boxed{\quad}\sqrt{\boxed{\quad}}}{\boxed{\quad}}$

출처 : 비상교육, 미래엔

[문제2]



오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overline{AB}=\overline{BF}=1$, $\overline{AD}=2$이다. 꼭짓점 A에서 $\overline{FH}$에 내린 수선의 발을 I라고 할 때, 선분 AI의 길이를 구하시오.

(풀이) $\square$의 정리에 의해 $\overline{EI}\ \square\ \overline{FH}$

$\triangle EFH$에서 $\overline{EF}\times\overline{EH}=\overline{EI}\times\overline{FH}$이므로

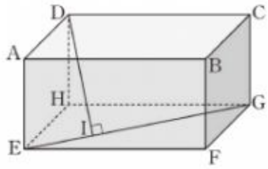
$\overline{EI}=\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$이다.

피타고라스정리에 의해 $\overline{AI}=\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$

[문제3]

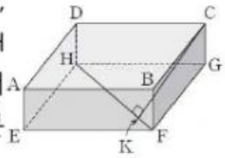
그림과 같이 $\overline{AB}=2, \overline{AE}=\overline{AD}=1$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 선분 DI의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$	② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$	④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$
⑤ $\dfrac{5\sqrt{5}}{5}$	



[문제4]

그림과 같이 $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=3$, $\overline{AE}=1$인 직육면체 ABCD-EFGH가 있다. 점 C에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 K라 할 때, 선분 CK의 길이를 구하시오.



(풀이) $\overline{CG}\perp$ 평면 $\square$, $\overline{CK}\perp\overline{HF}$이므로

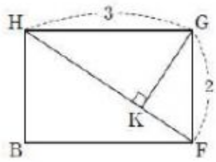
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{GK}\perp\overline{HF}$

직각삼각형 HFG의 넓이에서

$\overline{FG}\times\overline{GH}=\overline{HF}\times\overline{GK}$

이때 $\overline{HF}=\sqrt{\square}$이므로

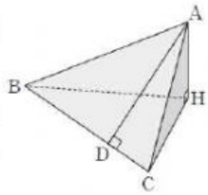
$\overline{GK}=\dfrac{\square}{\sqrt{\square}}$



따라서 직각삼각형 CGK에서 $\overline{CK}=\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$

[문제5]

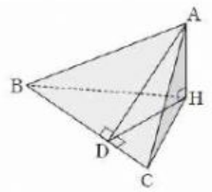
그림과 같이 점 A에서 직선 BC를 포함한 평면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{AH}=1$, $\overline{AC}=2$, $\overline{AB}=\sqrt{7}$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$일 때, 사면체 ABCH의 부피를 구하시오.



(풀이)

$\overline{AH}\perp$ 평면 $\square$,

$\overline{AD}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HD}\perp\overline{BC}$



직각삼각형 ABD에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AD}^2}=\square$

직각삼각형 ACD에서 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\square$

직각삼각형 ADH에서

$\overline{HD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{\square}$

이고 $\overline{BC}=\square$ 이므로 삼각형 BCH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{HD}=\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$

따라서 사면체 ABCH의 부피는 $\dfrac{\sqrt{\square}}{\square}$