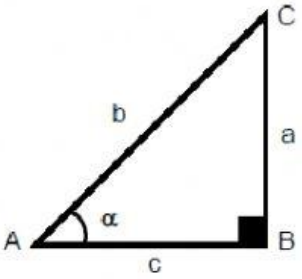
Razones Trigonométricas

1. Definición

La razón trigonométrica de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como el cociente que se obtiene al dividir las medidas de las longitudes de dos de los lados del triángulo rectángulo con respecto a uno de los ángulos agudos.

Sea el triángulo rectángulo ABC recto en B.



Teorema de Pitágoras

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Elementos:

- ★ Hipotenusa (H) → b
- ★ Catetos respecto al ángulo "α"
  - a) Cateto opuesto (C.O.) → a
  - b) Cateto adyacente (C.A.) → c
- ★ m ∗ CAB → α (agudo)

2. Razones Trigonométricas para el ángulo "α":

Seno de α → $sen\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{a}{b}$

Coseno de α → $cos\alpha = \frac{CA}{H} = \frac{c}{b}$

Tangente de α → $tg\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{c}$

Cotangente de α → $ctg\alpha = \frac{CA}{CO} = \frac{c}{a}$

Secante de α → $sec\alpha = \frac{H}{CA} = \frac{b}{c}$

Cosecante de α → $csc\alpha = \frac{H}{CO} = \frac{b}{a}$

INVERSAS

Por ejemplo: $sen\alpha = \frac{1}{3}$ → $csc\,\alpha = 3$

Inversas

$tg\alpha = \frac{5}{3}$ → $ctg\alpha = \frac{3}{5}$

Inversas

Observación:

1. En un triángulo rectángulo

   hipotenusa > catetos

   Entonces:

   - ★ $0 < Sen\,\alpha < 1 \quad \wedge \quad 0 < Cos\,\alpha < 1$
   - ★ $Sec\,\alpha > 1 \quad \wedge \quad Csc\,\alpha > 1$

2. $sen^2\alpha \neq Sen\alpha^2$

3. $\frac{sen\alpha}{sen\beta} \neq \frac{\alpha}{\beta}$

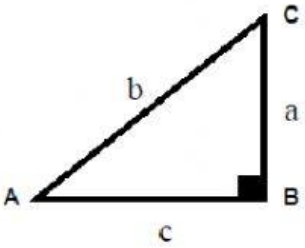
Ejercicios Resueltos

01. En un triángulo rectángulo ABC recto en B reducir:

$$E = sen\,A \,.sec\,C + cos\,C \,.\, csc\,A$$

Solución:

Representamos un triángulo que se ajuste al problema:



Del gráfico:

$$E = \frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} + \frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}}$$

$E = 1 + 1 \Rightarrow$

$E = 2$

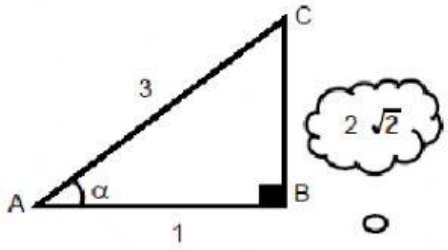
02. Si: α es un ángulo agudo tal que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Calcular tg α.

Solución:

Del dato: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ → cateto adyacente → hipotenusa

"α" debe estar dentro de un triángulo rectángulo.



Por Pitágoras:

$3^2 = 1^2 + \overline{BC}^2 \longrightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{2}$

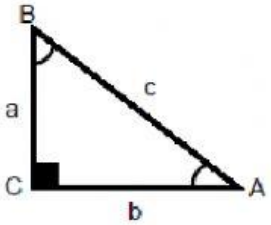
Piden: $tg\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1} \Rightarrow 2\sqrt{2}$

03. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que: $\text{Cos}A = \frac{\text{Csc}B}{5}$

Calcular: P = SecA – CtgB

Solución:

Del enunciado: $\text{Cos}A = \frac{\text{Csc}B}{5}$



$\frac{b}{c} = \frac{\frac{c}{b}}{5}$

$5b^2 = c^2$

$\sqrt{5}b = c$

Por el teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 + b^2 = 5b^2$
$a^2 = 4b^2$
$a = 2b$

Nos piden:

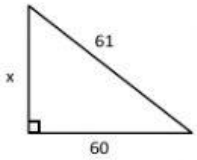
$P = \text{Sec}A - \text{Ctg}B = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}$

$P = \frac{\sqrt{5}b}{b} - \frac{2b}{b} \Rightarrow$ **P = $\sqrt{5}$ - 2**

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

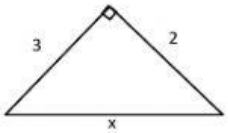
1).- Calcula "x" en la figura.

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 13



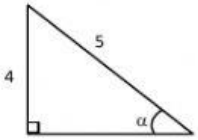
2).- Calcula "x" en la figura:

a) 7
b) 9
c) $\sqrt{13}$
d) $\sqrt{11}$
e) 20



3).- Calcula en la figura, "Tgα".

a) 3
b) 2
c) 1
d) $\sqrt{5}$
e) 4/3



4).- Si; Senϕ= 7/25. Calcula: "Cotϕ".

a) 7/24 **b) 24/7** **c) 7/25**
d) 1 **e) 5**

5).- Si: Senϕ = 40/41, calcula:
E = Cscϕ + cotϕ

a) 4/5 **b) 5/4** **c) 1**
d) 2 **e) 3**

6).- Si: Senθ = 60/61. Calcula el valor de:

P = Secθ + Tgθ

a) 11 **b) 60** **c) 61**
d) 7 **e) 12**

7).- Si : Secα = 2,6 $\wedge$ 0° < α < 90°
Calcula : Ctgα+Cscα

a) 5 **b) 3/2** **c) 2/3**
d) 3 **e) 2**

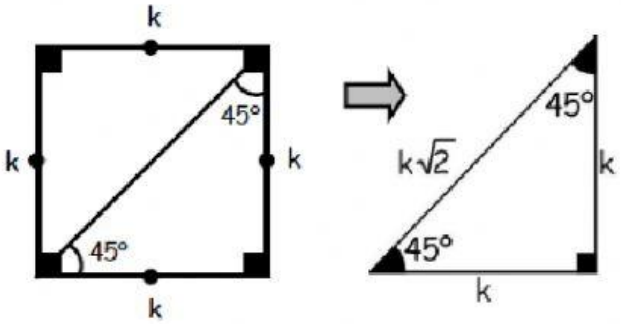
8).- Si: Tgθ = 0,333.....
Calcula: E = SenθCosθ.

a) 2/10 **b) 3/10** **c) 10/3**
d) 5 **e) N.A**

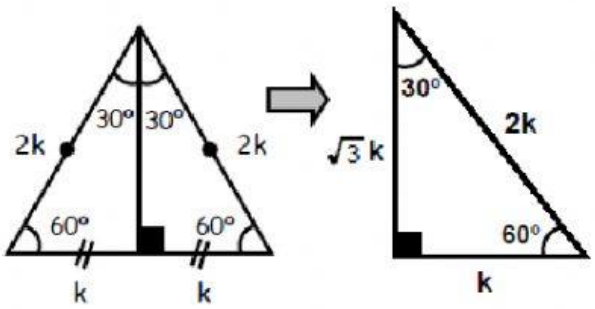
Razones Trigonométricas de Triángulos Notables

Son aquellos triángulos rectángulos donde conociendo las medidas de sus ángulos agudos, se puede saber la proporción existente entre sus lados.
Como por ejemplo:

1. Triángulo Notable de 45°

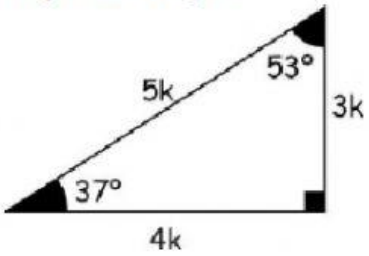


2. Triángulo Notable de 30° y 60°



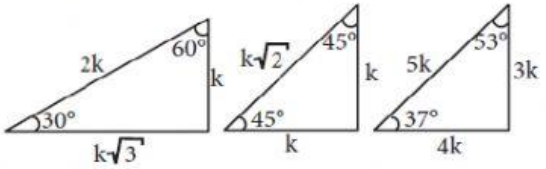
3. Triángulo Notables Aproximados

a) Triángulo de 37° y 53°



Razones trigonométricas de los ángulos agudos: 30°, 60°, 45°, 37° y 53°

Las razones trigonométricas de estos ángulos se obtienen a partir de los siguientes triángulos rectángulos.



De los triángulos anteriores, se obtiene:

RT \ Ángulo	30°	37°	45°	53°	60°
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
Ctg	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	2
Csc	2	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Razones trigonométricas recíprocas

Siendo **θ** un ángulo agudo, se cumple:

$$\text{Csc}\theta = \frac{1}{\text{Sen}\theta} \Rightarrow \text{Sen}\theta.\text{Csc}\theta = 1$$

$$\text{Sec}\theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta} \Rightarrow \text{Cos}\theta.\text{Sec}\theta = 1$$

$$\text{Ctg}\theta = \frac{1}{\text{Tg}\theta} \Rightarrow \text{Tg}\theta.\text{Ctg}\theta = 1$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1).- Calcula : $(\text{Tg}37° + \text{Ctg}53°)^{\text{Csc}30°}$

a) 9/4 b) 9/16 c) 3/2
d) 4/9 e) ¾

2).- Calcula: $1-\text{Cos}60°-2\text{Sen}^2 30°$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4