SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL (SPtLDV)

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Aljabar dan Fungsi

Di akhir fase E, siswa dapat **menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan** sistem persamaan linear tiga variabel dan **sistem pertidaksamaan linear dua variabel**. Mereka dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat (termasuk akar imajiner), dan persamaan eksponensial (berbasis sama) dan fungsi eksponensial.

TUJUAN PEMBELAJARAN

Dengan menggunakan aplikasi *Zoom Meeting* :

1. Setelah guru bersama siswa melakukan pengamatan pada tayangan *Canva* **(TPACK)** dan mendiskusikannya **(C, Collaboration)**, siswa **(A)** dapat **membedakan (B, C5)** Pertidaksamaan Linear Dua Variabel (PtLDV) dan bukan Pertidaksamaan Linear Dua Variabel (PtLDV) dengan **tepat (D)** dan penuh rasa **percaya diri (PPP).**
2. Setelah guru bersama siswa melakukan pengamatan pada tayangan *Canva* **(TPACK)** dan mendiskusikannya **(C, Collaboration)**, siswa **(A)** dapat **menemukan (B, C6)** Daerah Himpunan Penyelesaian (DHP) Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel (SPtLDV) dengan **tepat (D)** dan penuh rasa **percaya diri (PPP).**
3. Setelah guru bersama siswa melakukan pengamatan pada tayangan *Canva* **(TPACK)** dan mendiskusikannya **(C, Collaboration)**, siswa **(A)** dapat **memecahkan (B, C4)** masalah kontekstual yang berkaitan SPtLDV dengan **tepat (D)** dan penuh rasa **percaya diri (PPP).**

A. PERTIDAKSAMAAN

Pertidaksamaan adalah suatu kalimat matematika yang memuat satu atau lebih variabel dan sebuah tanda ketidaksamaan. Bila pertidaksamaan tersebut berbentuk linear (tidak mengandung fungsi polynomial, trigonometri, logarima atau eksponen), maka pertidaksamaan tersebut dinamakan pertidaksamaan linear.

Berdasarkan definisi di atas, maka pertidaksamaan linear dua variabel dapat dinyatakan dalam bentuk:

$ax + by > c$, $ax + by < c$, $ax + by \geq c$ atau $ax + by \leq c$

Dengan x, y variabel dan a, b, c konstanta.

Pertidaksamaan linear dua variabel tersebut, misalnya sebagai berikut :

(i) $x + 2y \leq 8$

(ii) $2x - y > 8$

(iii) $3x + y \geq 13$

Gabungan dari dua atau lebih dari pertidaksamaan linear disebut sistem pertidaksamaan.

B. SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel adalah suatu sistem pertidaksamaan linear yang memuat dua variabel dengan koefisien bilangan real.

C. PENYELESAIAN SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL

Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel adalah himpunan semua pasangan titik $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

D. DAERAH PENYELESAIAN SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Daerah Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear adalah daerah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

PERMASALAHAN

Pak Rendi berencana membangun 2 tipe rumah; yaitu, tipe A dan tipe B di atas sebidang tanah seluas 10.000 $m2$. Setelah dia berkonsultasi dengan arsitek (perancang bangunan), ternyata untuk membangun rumah tipe A dibutuhkan tanah seluas 100 $m2$ dan untuk membangun rumah tipe B dibutuhkan tanah seluas 75 $m2$. Karena dana yang dimilikinya terbatas, maka banyak rumah yang direncanakan akan dibangun paling banyak 125 unit. Jika kamu adalah arsitek pak Rendi maka: 1) Bantulah pak Rendi menentukan berapa banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun sesuai dengan kondisi luas tanah yang ada dan jumlah rumah yang akan dibangun! 2) Gambarkanlah daerah penyelesaian pada bidang kartesius berdasarkan batasan - batasan yang telah diuraikan!

Alternatif Penyelesaian

Misalkan x : banyak rumah tipe A yang akan dibangun

y : banyak rumah tipe B yang akan dibangun

1. Banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun
   a. Keterbatasan yang dimiliki pak Rendi adalah:
   Luas tanah yang diperlukan untuk membangun rumah tipe A dan tipe B di atas seluas 10.000 m^2 ditentukan oleh pertidaksamaan:
   $100x + 75y \leq 10.000$, pertidaksamaan ini disederhanakan menjadi:
   $4x + 3y \leq 400$ .... (1)
   b. Jumlah rumah yang akan dibangun, dibentuk oleh pertidaksamaan:
   $x + y \leq 125$ .... (2)
   Dari kedua keterbatasan di atas (pertidaksamaan 1 dan pertidaksamaan 2), banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun, dihitung dengan menggunakan konsep sistem

persamaan linear dua variabel sebagai berikut:

$$\begin{array}{r|l|l} 4x + 3y = 400 & \times 1 & 4x + 3y = 400 \\ x + y = 125 & \times 3 & \underline{3x + 3y = 375} \; - \\ & & \qquad x = 2 \end{array}$$

Untuk $x = 2$, maka $y = 125 - x$

$= 125 - 25$

$= 100$

Hal ini berarti: dengan keterbatasan yang ada, pak Rendi dapat membangun rumah tipe A sebanyak 25 unit, dan rumah tipe B sebanyak 100 unit.

2. Grafik daerah pada diagram kartesius

   Untuk menggambar daerah penyelesaian pada diagram kartesius dilakukan langkah - langkah sebagai berikut:

Langkah 1

Menggambar garis dengan persamaan $4x + 3y = 400$ dan garis $x + y = 125$. Agar kita mudah menggambar garis ini, terlebih dahulu kita cari titik potong dengan sumbu x yang terjadi jika $y = 0$ dan titik potong dengan sumbu y yang terjadi jika $x = 0$.

- Untuk garis $4x + 3y = 400$, jika $y = 0$, maka $x = 100$ jika $x = 0$, maka $y = 133.3$ Maka garis $4x + 3y = 400$ memotong sumbu y di titik (0, 133.3) dan memotong sumbu y di titik (100, 0).
- Untuk garis $x + y = 125$, jika $y = 0$, maka $x = 125$ jika $x = 0$, maka $y = 125$ Maka garis $x + y = 125$ memotong sumbu y di titik (0, 125) dan memotong sumbu y di titik (125, 0).

Langkah 2

a. Menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$ dan $x + y \leq 125$. Daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$.

b. Jika garis $4x + 3y \leq 400$ digambar pada diagram kartesius, maka garis tersebut akan membagi dua daerah, yaitu daerah $4x + 3y < 400$ dan daerah $4x + 3y > 400$.

c. Selanjutnya menyelidiki daerah mana yang menjadi daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$, dengan cara mengambil sembarang titik misal $P(x, y)$ pada salah satu daerah. Kemudian mensubstitusikan titik tersebut ke pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$.

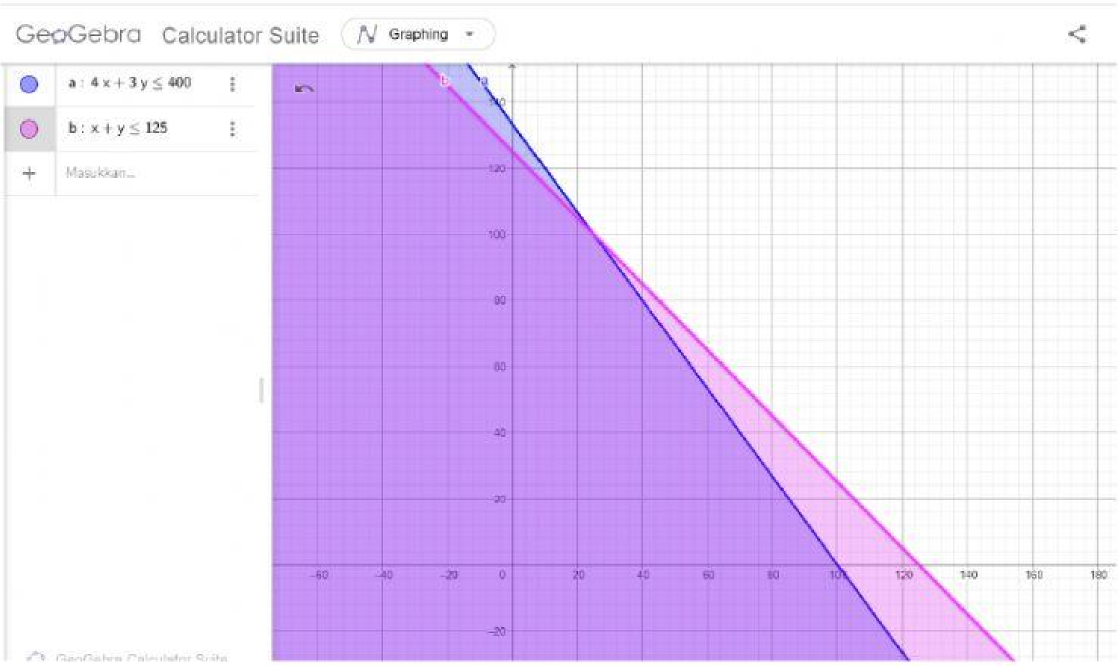
d. Jika pertidaksamaan tersebut bernilai benar, maka daerah yang yang memuat titik P x, y

merupakan daerah penyelesaiannya. Jika bernilai salah, maka daerah tersebut bukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Dengan cara yang sama maka daerah penyelesaian $x + y \leq 125$ juga dapat diketahui.

Langkah 3

Mengarsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir dua kali merupakan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear.

Setelah langkah 1, 2, dan 3 di atas dilakukan, maka daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan digambarkan disamping. Gambar yang diarsir merupakan daerah penyelesaian.



Mempelajari sistem pertidaksamaan linear dua variabel ini berguna untuk menentukan nilai optimum suatu fungsi dengan domain suatu himpunan tertentu.

Bentuk fungsi $(ax + by)$ yang dicari nilai maksimum atau minimumnya disebut bentuk **fungsi objektif.**

Secara umum, fungsi objektif mempunyai nilai maksimum atau minimum di titik pojok daerah himpunan penyelesaian.

Langkah-langkah menentukan nilai optimum suatu fungsi objektif, antara lain:

1. Merumuskan persoalan ke dalam model matematika. Dalam model matematika yang didapat, terbentuk sistem pertidaksamaan linear dan fungsi objektif $(ax + by)$.

2. Menggambar daerah yang memenuhi suatu sistem pertidaksamaan.
3. Menganalisa nilai fungsi objektif, dilakukan dengan menggunakan metode uji titik pojok atau metode garis selidik. Dari sini diperoleh nilai optimum yaitu nilai maksimum atau minimum yang mungkin.

PERMASALAHAN

Seorang pedagang sepatu mempunyai modal Rp8.000.000,00. Ia merencanakan membeli dua jenis sepatu yaitu sepatu pria dan sepatu wanita. Harga beli sepatu pria adalah Rp20.000,00 per pasang dan sepatu wanita harga belinya Rp16.000,00 per pasang. Keuntungan dari penjualan sepatu pria dan sepatu wanita berturut-turut adalah Rp6.000,00 dan Rp5.000,00. Mengingat kapasitas kioasnya ia akan membeli sebanyak-banyaknya 450 pasang.

1. Buatlah model matematika yang sesuai dengan persoalan ini!
2. Berapa banyak sepatu pria dan wanita yang harus dibeli agar pedagang tersebut memperoleh keuntungan sebesar-besarnya?
3. Berapa keuntungan terbesar yang dapat diperoleh?

Penyelesaian:

Masalah di atas dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut.

1. Merumuskan persoalan ke dalam model matematika

   $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 450$, dan $5x + 4y \leq 2.000$ untuk x, $y \in \boldsymbol{C}$.

   Fungsi obejktif ($6.000x + 5.000y$) keuntungan sebesar-besarnya (maksimum)
2. Menggambarkan daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan

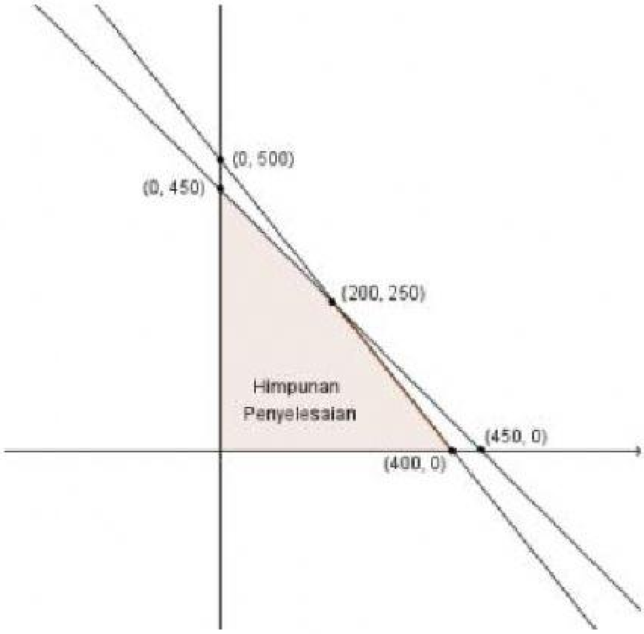
$$\begin{array}{rl|l|l} x + y &= 450 & \times 5 & 5x + 5y = 2.250 \\ 5x + 5y &= 2000 & \times 1 & 5x + 4y = 2.000 \\ \hline & & & y = 250 \end{array} \quad -$$

   Untuk $x = 250$, maka $x + y = 450$

   $x + 250 = 450$

   $x = 200$

   Titik potong garis $x + y = 450$ dan $5x + 4y = 2.000$ adalah $(200, 250)$.



3. Menganalisa nilai fungsi objektif

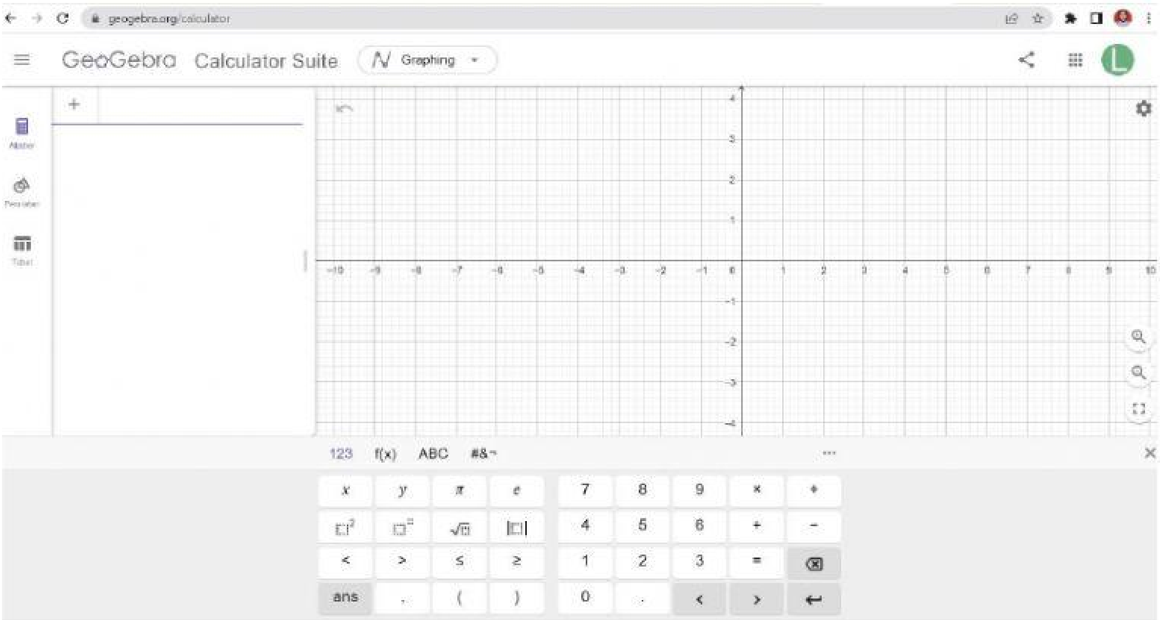
   Titik pojok pada daerah himpunan penyelesaian adalah (0, 0), (400, 0), (200, 250), dan (0, 450). Selanjutnya titik-titik tersebut diujikan pada fungsi objektif sebagai berikut.

Titik Pojok	6000 x + 5.000y	Nilai
(0,0)	6.000 (0)+ 5.000(0)	0
(400, 0)	6.000 (400)+ 5.000(0)	2.400.000
(200, 250)	6.000 (200)+ 5.000(250)	2.450.000
(0, 450)	6.000 (0)+ 5.000(450)	2.250.000

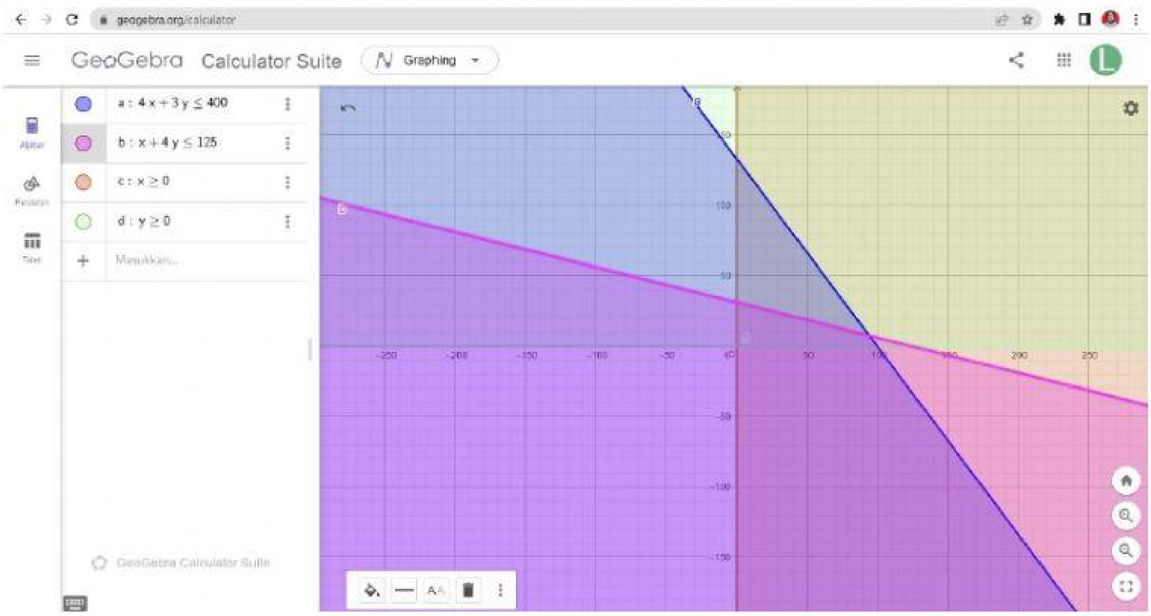
   Jadi, keuntungan maksimum pedagang tersebut adalah Rp2.450.000,00 yaitu dengan membeli sepatu pria sebanyak 200 pasang dan sepatu wanita 250 pasang

E. LANGKAH – LANGKAH MENGGUNAKAN GEOGEBRA UNTUK MENENTUKAN DAERAH PENYELESAIAN SPtLDV

1. Buka aplikasi geogebra atau akses melalui *geogebra.org/calculator,* sehingga muncul sebagai berikut :



2. Ketikkan secara langsung pertidaksamaan pada menu input



RANGKUMAN

1. Pertidaksamaan linear dua variabel dapat dinyatakan dalam bentuk:

$ax + by > c, ax + by < c, ax + by \geq c$ atau $ax + by \leq c$

2. Langkah-langkah menentukan nilai optimum suatu fungsi objektif, antara lain:
   - Merumuskan persoalan ke dalam model matematika. Dalam model matematika yang didapat, terbentuk sistem pertidaksamaan linear dan fungsi objektif ($ax + by$).
   - Menggambar daerah yang memenuhi suatu sistem pertidaksamaan.
   - Menganalisa nilai fungsi objektif, dilakukan dengan menggunakan metode uji titik pojok atau metode garis selidik. Dari sini diperoleh nilai optimum yaitu nilai maksimum atau minimum yang mungkin

AYO BERLATIH!

Pak Dahlan akan menambah dagangan helmnya. Dengan keterbatasan tempat, helm jenis A dan jenis B tidak melebihi 50 helm. Harga pembelian helm jenis A Rp120.000,00 dan harga helm jenis B Rp90.000,00. Dari penjualan helm-helm tersebut diperoleh keuntungan Rp30.000,00 untuk setiap helm jenis A dan Rp25.000,00 untuk setiap helm jenis B. Jika model pedagang tersebut Rp5.400.000,00, Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh pedagang tersebut.