Nama:

KALKULUS MULTIVARIABEL

ATURAN BERANTAI

Definisi

Aturan rantai pada fungsi-fungsi satu variabel mengatakan bahwa jika $w = f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensiasikan terhadap x dan $x = g(t)$ adalah fungsi yang terdiferensiasikan terhadap t maka w adalah fungsi yang terdiferensiasikan terhadap t dan dw/dt dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Untuk fungsi komposisi $w(t) = f(g(t))$, dapat memandang t sebagai variabel bebas dan $x = g(t)$ sebagai variabel perantara, karena t menentukan nilai x yang pada gilirannya memberikan nilai w dari fungsi f. Untuk fungsi beberapa variabel, aturan rantai memiliki lebih dari satu bentuk, yang bergantung pada berapa banyak variabel bebas dan perantara yang terlibat. Namun demikian, segera setelah variabel-variabel tersebut ditentukan. Atran rantai dapat diterapkan dengan cara yang sama di atas.

Fungsi Dua Variabel

TEOREMA 1 Aturan Rantai untuk Fungsi-fungsi Satu Variabel Bebas dan Dua Variabel Perantara

Jika w=f(x,y) terdiferensiasikan dan jika x=x(t) dan y=y(t) adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan terhadap t maka fungsi komposisi w=f(x(t),y(t)) adalah fungsi yang terdiferensiasikan terhadap t dan

$$\frac{dw}{dt} = f_x\big(x(t), y(t)\big).x'(t) + f_y\big(x(t), y(t)\big).y'(t) \quad \text{Atau}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

LIVEWORKSHEETS

TEOREMA 2

Misalkan $x = x(s,t)$ dan $y = y(s,t)$ mempunyai turunan pertama di (s,t) dan misalkan $w = f(x,y)$ dapat didiferensialkan di $\big(x(s,t), y(s,t)\big)$. Maka $w = f\big(x(s,t), y(s,t)\big)$ mempunyai turunan parsial pertama yang diberikan oleh

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad dan \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Simaklah penjelasan dari video di bawah ini !!!

AYO MENALAR 1

1. Tentukanlah $\partial w/\partial t$ dalam bentuk s dan t jika $w = x^2y$ dengan $x = st$ dan $y = s - t$.

   Penyelesaian:

   $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

   $\frac{\partial w}{\partial t} = \cdots y\,.s + x^2\,.\ldots$

   $\frac{\partial w}{\partial t} = 2\ldots(s-t)s + (st)^2.\ldots$

   $\frac{\partial w}{\partial t} = 2s^3t - 2s^2t^2 + s^3t^2$

LIVEWORKSHEETS

Lanjutan

2. Gunakan Aturan Rantai untuk menentukan turunan $w = xy$ terhadap t di sepanjang lintasan $x = \cos t, y = \sin t$. Berapakah nilai turunan tersebut di $t = \frac{\pi}{2}$?

Penyelesaian:

Gunakan rumus Aturan Rantai untuk menentukan dw/dt sebagai berikut.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= \frac{\partial(\dots)}{\partial x} \cdot \frac{d}{dt}(\dots) + \frac{\partial(\dots)}{\partial y} \cdot \frac{d}{dt}(\dots)$$
$$= y\,(\dots) + x(\dots)$$
$$= \cdots(\dots) + \cdots(\dots)$$
$$= -\sin^2 t + \cos^2 t$$
$$= \cdots$$

Sebagai sebuah fungsi terhadap t,

$$w = \cdots = \cos t \,.\, \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$$

Sehingga

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(\dots) = \frac{1}{2}.2\cos 2t = \cdots$$

Pada kedua kasus ini, di titik t yang diberikan, maka

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos\left(2\,.\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$$

3. Jika $w = x^2y + 3xy^4$, dimana $x = \sin 2t$ dan $y = \cos t$. Tentukan $\frac{dw}{dt}$.

Penyelesaian:

$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$= (\dots y + \cdots y^4)(2\dots 2t) + (x^2 + \cdots xy^3)(-\dots t)$

Jika $t = 0$, maka $x = 0\ dan\ y = 1$, jadi

$\frac{dw}{dt} = (\dots + 3)(2\dots 0) + (0 + \cdots)(-\dots 0)$

$\frac{dw}{dt} = \cdots(2\,.1) + 0$

$\frac{dw}{dt} = 6$



LIVEWORKSHEETS

FUNGSI TIGA VARIABEL

TEOREMA 3 -Aturan Rantai untuk Fungsi-Fungsi Satu Variabel Bebas dan Tiga Variabel Perantara Jika $w = f(x, y, z)$ terdiferensiasikan dan x, y, dan z adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan terhadap t maka w adalah fungsi yang terdiferensiasikan terhadap t dan

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Buktinya identik dengan bukti Theorema 5 kecuali sekarang ada tiga variable perantara alih-alih dua. Diagram cabang kami gunakan untuk mengingatkan bahwa persamaan baru juga serupa, dengan tiga rute dari w ke t.

AYO MENALAR 2

Tentukan dw/dt jika

$$w = xy + z, \qquad x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t$$

Pada contoh ini, nilai-nilai $w(t)$ berubah disepanjang jalur heliks ketika t berubah. Berapakah nilai turunannya di titik $t = 0$?

PENYELESAIAN

Dengan menggunakan Aturan Rantai untuk tiga variabel perantara, kita memiliki

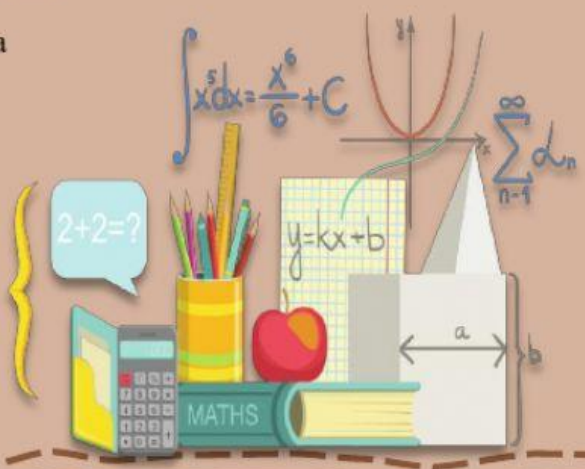
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= (\ldots)(-\sin t) + (x)(\ldots t) + (\ldots)(1)$$

$$= (\ldots)(-\sin t) + (\cos t)(\ldots t) + 1$$ Substitusikan variabel-variabel perantara

$$= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) \quad = 2$$



LIVEWORKSHEETS

Fungsi-fungsi yang Didefenisikan pada Permukaan

Jika kita memperhatikan temperature $w = f(x, y, z)$ di titik (x, y, z) pada permukaan bumi, kita mungkin lebih memandang x, y, dan z sebagai fungsi-fungsi terhadap variabel r dan s yang merupakan garis bujur dan lintang titik-titik tersebut. Jika $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, dan $z = (r, s)$, kita kemudian dapat menyatakan temperatur sebagai suatu fungsi terhadap r dan s dengan fungsi komposisi

$$w = f\big(g(r,s), h(r,s), k(r,s)\big)$$

Dengan syarat-syarat yang dinyatakan di bawah ini, w memiliki turunan-turunan parsial terhdap r dan s yang dapat dihitung dengan cara berikut ini.

TEOREMA 4 Aturan Rantai untuk Dua Variabel Bebas dan Tiga Variabel Perantara

Misalkan bahwa $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, dan $z = k(r, s)$. Jika keempat fungsi tersebut seluruhnya terdiferensiasikan, maka w memiliki turunan-turunan parsial terhadap r dan s, yang diberikan oleh rumus-rumus

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Persamaan pertama dari persamaan-persamaan ini dapat diturunkan dari Aturan Rantai pada Teorema 6 dengan menganggap s tetap dan memperlakukan r sebagai t. Persamaan kedua dapat diturunkan dengan cara yang sama, menganggap r tetap dan memperlakukan s sebagai t.

AYO MENALAR 3

Nyatakan $\partial w/\partial r$ dan $\partial w/\partial s$ dalam r dan s jika

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{s}, \qquad y = r^2 + \ln s, \qquad z = 2r$$

Penyelesaian Dengan menggunakan rumus-rumus pada Teorema 7, kita mendapatkan

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= (1)(\dots) + (\dots)(2r) + (2z)(\dots) \qquad \text{Gantikan variabel perantara z}$$

$$= \cdots + \cdots r + (\dots r)(2) = \frac{1}{s} + 12r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (1)(\dots) + (2)(\dots) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$$

Jika $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, dan $y = h(r, s)$, maka

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \quad \textbf{dan} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Jika f adalah suatu fungsi dua variabel perantara sebagai pengganti tiga variabel,

setiap persamaan pada Teorema 4 menjadi satu suku lebih pendek secara bersesuaian.

LIVEWORKSHEETS

Penelaahan Kembali Pendiferensiasian Implisit

Aturan Rantai dua variable pada Teorema 5 mengarah kepada suatu rumus yang mengeluarkan beberapa operasi aljabar pada pendiferensiasian implisit. Misalkan bahwa

1. Fungsi F(x,y) terdiferensiasikan dan
2. Persamaan F(x,y)=0 mendefinisikan y secara implisit sebagai suatu fungsi yang terdiferensiasikan terhadap x, katakan y=h(x)

Karena w= F(x,y)=0, turunan *dwidx* haruslah nol. Dengan menghitung turunan tersebut dari Aturan Rantai (diagram cabang pada Gambar14.25), kita mendapatkan

$0=\frac{dw}{dx} = F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx}$ Teorema 5 dengan t=x dan

$= F_x \times 1 + F_y \times \frac{dy}{dx}$

Jika $F_y = \partial w . \partial y \neq 0$, kita dapat menyelesaikan persamaan ini untuk dy/dx untuk memperoleh

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F}{F}$$

Kita nyatakan hasil ini secara formal

Teorema 5—Rumus untuk Pendiferensiasian Implisit Misalkan bahwa F(x,y) terdiferensiasiakan dan persamaan F(x,y)= 0 mendefinisikan y sebagai suatu fungsi yang terdiferensiasiakan terhadap X_y maka di setiap titik di mana $F_y \neq 0_x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

AYO MENALAR 4

Gunakan Teorema 8 untuk mencari dy/dx jika $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$

Penyelesaian Ambil $F(x,y)= y^2 - x^2 - \sin xy$. Kemudian

$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y\cos xy}{2y - x\cos xy}$

= ...

Hasil pada Teorema 8 dapat diperluas dengan mudah ke kasus tiga variable . Misalkan bahwa persamaan F(x,y,z) = 0 mendefenisikan variable z secara implisit sebagai fungsi z= f(x,y). Akibatnya untuk semua (x,y) pada daerah asal f_y kita memiliki F(x,y,f(x,y))= 0. Dengan menganggap bahwa F dan f adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasiakan, kita dapat menggunakan aturan rantai untuk mendiferensiasiakan persamaan F(x,y,z) = 0 terhadap variable bebas x.

$0=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$

$= F_x .1 + F_y .0 + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$ y adalah konstan Ketika mendiferensiasikan terhadap x

LIVEWORKSHEETS

Sehingga

$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Perhitungan serupa untuk diferensiasi terhadap variable independent y menghasilkan

$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Ketika $F_z \neq 0$, kita dapat menyelesaikan dua persamaan terakhir ini untuk turunan-turunan parsial dari z= f(x,y) untuk memperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Suatu hasil penting dari kalkulus lanjut, yang dinamakan **Teorema Fungsi Implisit,**menyatakan syarat-syarat agar hasil-hasil kita pada persamaan (2) sahih. Jika turunan-turunan parsial F_x, F_y, dan F_z kontinu di seluruh himpunan terbuka R di ruang yang memuat titik (X_0, y_0, Z_0), dan jika untuk suatu konstanta c, $F(X_0, y_0, Z_0) = c$ dan $F_z(X_0, y_0, Z_0) \neq 0$, maka persamaan F(x,y,z) = c mendefenisikan z secara implisit sebagai suatu fungsi yang terdiferensiasiakan terhadap x dan y di dekat (X_0, y_0, Z_0) dan turunan parsial terhadap z diberikan oleh persamaan di atas.

AYO MENALAR 5

Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ di (0,0,0) jika $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y = 0$

Penyelesaian Misalkan $F(x,y,z) = x^3 + z^2 + ye^{xz} + z \cos y$, akibatnya

$F_x = 3x^2 + zye^{xz}$, $F_y = e^{xz} - z \sin y_1$ dan $F_z = 2z + xye^{xz} + \cos y$

Karena F(0,0,0) = 0, $F_z(0,0,0) = 1 \neq 0$, dan seluruh turunan parsial pertama kontinu, Teorema Fungsi Implisit mengatakan bahwa F(x,y,z)= 0 mendefenisikan z sebagai suatu fungsi yang terdiferensiasikan terhadap x dan y di dekat titik (0,0,0). Dari persamaan di atas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x^2 + z \sin y}{2z + xye^{xz} + \cos y}$$

Di (0,0,0), kita mendapatkan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{0}{1} = 0 \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1} = -1$$



LIVEWORKSHEETS

Fungsi Banyak Variabel

Secara umum, misalkan w = f(x, y ,...,v) adalah suatu fungsi yang terdiferensiasikan terhadap variabel-variabel perantara x, y ,...,v (himpunan terhingga) dan x, y, ...v adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan terhadap variabel-variabel bebas p,q,…,t (himpunan terhingga yang lain). Karenanya w adalah fungsi yang terdiferensiasikan terhadap p sampai dengan t, dan turunun parsial dari w terhadap variabel-variabel ini diberikan oleh persamaan-persamaan dalam bentuk

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}$$

Persamaan yang lain diperoleh dengan menggantikan p dengan q,...,t, secara bersamaan.

Satu cara untuk mengingat persamaan ini adalah dengan memandang sisi kanan sebagai perkalian dua vector dengan komponen-komponen

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},\ldots,\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ dan $\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial p}\ldots,\frac{\partial v}{\partial p}\right)$

Turunan dari w terhadap variable-variabel perantara

Turunan dari variable-variabel perantara terhadap variable bebas yang dipilih

Simaklah video penjelasan di bawah ini!



AYO MENALAR 6

Tentukan $\frac{\partial w}{\partial t}$ jika w = xy+yz+xz, x=t^2, y=1-t^2, z=1-t

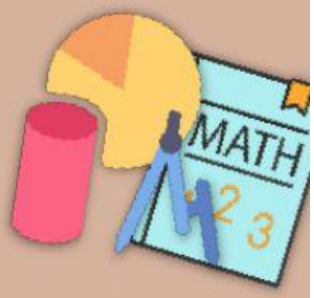
Penyelesaian:

$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t}$

= (...) 2t+(x+z)(...)+(x+y)(...)

= (...) (2t) + (t^2-t+1)(...) + 1(...)

= -4t^3+2t-1



LIVEWORKSHEETS

AYO BERLATIH

1. Tentukan nilai dari $\frac{dw}{dt}$ dalam bentuk t dengan menggunakan Aturan Rantai dimana $w = e^x \sin y + e^y \sin x$, dengan $x = 3t$ dan $y = 2t$

2. Berapakah nilai dari $\partial w/\partial t$ dengan $w = e^{x^2+y^2}$, $x = s \sin t$ *dan* $y = t \sin s$. Tulislah jawaban dalam bentuk s dan t

3. Carilah *dw/dt* dengan menggunakan AturanRantai, nyatakan hasil akhir dan bentuk variabel *t* dari :
   $w = \sin(xyz^3)$ $x = t^4$, $y = t^3$, $z = t$

4. Nyatakan $\partial w/\partial r$ dan $\partial w/\partial s$ dalam *r* dan *s* jika
   $w = x + 2y + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$, $z = r$

5. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ jika $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

6. Tentukan $\frac{\partial w}{\partial t}$ jika $w = e^{xy+z}$, $x=s+t$, $y=s-t$, $z=t^2$

LIVEWORKSHEETS