

Lembar Kerja Mahasiswa

Nama :

NIM :

Persamaan Differensial Tingkat Satu Derajat Satu

a. Persamaan Differensial Faktor Integrasi dan Cara Menyelesaikannya

b. Persamaan Differensial Linier dan Cara Menyelesaikannya

c. Persamaan Differensial Bernoulli dan Cara Menyelesaikannya

Bahan Kajian

1. Menyampaikan dan menjelaskan Defenisi, Teorema dan Sifat-sifat pada Persamaan Differensial Faktor Integrasi dan Cara Menyelesaikannya
2. Menyampaikan dan menjelaskan Defenisi, Teorema dan Sifat-sifat pada Persamaan Differensial Linier dan Cara Menyelesaikannya
3. Menyampaikan dan menjelaskan Defenisi, Teorema dan Sifat-sifat pada Persamaan Differensial Bernoulli Dan Cara Menyelesaikannya

Persamaan Differensial Faktor Integrasi

Jika persamaan differensial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 1)

Tidak eksak atau $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, dalam hal ini mungkin dapat ditemukan suatu fungsi

$u = u(x, y)$, sehingga :

$$u(x, y)P(x, y)dx + u(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad \dots\dots\dots 2)$$

Menjadi persamaan differensial eksak dan berlakulah :

$\frac{\partial(uP)}{\partial y} = \frac{\partial(uQ)}{\partial x}$, jika demikian $u = u(x, y)$ dinamakan faktor integrasi, maka :

$\overline{P(x, y)} dx + \overline{Q(x, y)} dy = 0$, eksak dengan :

$$\overline{P(x, y)} = u(x, y)P(x, y) \text{ dan } \overline{Q(x, y)} = u(x, y)Q(x, y)$$

Persamaan Differensial linier

Bentuk Baku : $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

Persamaan ini dalam Bentuk Umum adalah :

$R(x)\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ dan akan ekivalen dengan bentuk baku jika $R(x) \neq 0$

sehingga dapat ditulis :

$$dy + p(x)ydx = q(x)dx$$

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$$

$$P(x, y) = p(x)y - q(x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = p(x)$$

$$Q(x, y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Karena $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, maka persamaan differensial ini tidak Exact.

$$\Rightarrow \frac{(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})}{0} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x) \Rightarrow u = e^{\int p(x)dx} \text{ merupakan faktor integrasi.}$$

Dengan demikian persamaan differensial menjadi :

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} (ye^{\int p(x)dx}) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d}{dx} (ye^{\int p(x)dx}) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

$$\Rightarrow ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$\text{Atau : } y = e^{-\int p(x)dx} (\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C)$$

Merupakan penyelesaian umum dengan $p(x)$ dan $q(x)$ fungsi kontinu.

Persamaan Differensial bernoulli

Bentuk Umum :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = y^n q(x), \text{ dimana : } n > 1.$$

Cara Menyelesaikan :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = y^n q(x) \quad \text{Bagi dengan : } y^n$$

$$\Rightarrow y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = q(x) \quad \dots \dots \dots *)$$

$$\text{Ambil : } v = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{(1-n)}{y^n}$$

$$\text{Perhatikan : } \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{(1-n)}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx}$$

Selanjutnya substitusi ke persamaan *), diperoleh :

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + p(x) v = q(x), \text{ karena } n \neq 1, \text{ maka :}$$

$$\frac{dv}{dx} + \bar{p}(x)v = \bar{q}(x) \quad \dots \dots \dots **)$$

$$\text{Dimana : } \bar{p}(x) = (1-n)p(x) \text{ dan } \bar{q}(x) = (1-n)q(x)$$

Pesamaan **) merupakan persamaan differensial Linier,
dan cara menyelesaikannya sudah didiskusikan sebelumnya.

$$[v = e^{-\int \bar{p}(x) dx} (\int \bar{q}(x) e^{\int \bar{p}(x) dx} dx + C)]$$

a. Persamaan Differensial Faktor Integrasi dan Cara Menyelesaikannya

Lengkapilah titik pada penyelesaian persamaan differensial faktor integrasi berikut ini

$$(x + 2y)dx + x dy = 0$$

$$P(x, y) = x + 2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \dots$$

$$Q(x, y) = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \dots$$

Karena $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, maka persamaan differensial ini tidak Exact.

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{2 - 1}{x} = \dots \Rightarrow u = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}{P} = \frac{1 - 2}{x + 2y} = \dots \Rightarrow \text{bukan salah satu dari a) dan b)}$$

Jadi faktor integrasinya adalah : $u = x$, sehingga persamaan differensial menjadi :

$$\overline{P(x, y)}dx + \overline{Q(x, y)}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2y)dx + x^2 dy = 0$$

$$\overline{P(x, y)} = x^2 + 2xy \Rightarrow \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \dots$$

$$\overline{Q(x, y)} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} = \dots$$

Karena $\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}$, maka persamaan differensial ini Exact.

Misalkan penyelesaian umum adalah $\mu(x, y) = C$, maka :

$$\text{Dari : } \frac{\partial [\mu(x, y)]}{\partial x} = P(x, y), \text{ diperoleh :}$$

$$d[\mu(x, y)] = (x^2 + 2xy) dx$$

$$\Leftrightarrow \int d[\mu(x, y)] = \int (x^2 + 2xy) dx$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) = \int (x^2 + 2xy) dx + \dots$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) = \dots$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + f(y) \dots \dots \dots 1) |$$

Untuk mendapatkan $f(y)$, turunkan persamaan 1) terhadap y dan samakan dengan $\overline{Q(x, y)}$, yaitu :

$$\frac{\partial [\mu(x, y)]}{\partial y} = \overline{Q(x, y)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial [\mu(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2y + f(y) \right) = x^2 + f'(y)$$

Dan $\overline{Q(x, y)} = x^2$, diperoleh :

$$\Rightarrow x^2 = x^2 + f'(y)$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0$$

$$\Rightarrow f(y) = C$$

Dengan demikian penyelesaian umum dari persamaan differensial di atas adalah :

$$\mu(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y = C \text{ atau } \frac{1}{3}x^3 + x^2y = C \text{ atau } x^3 + 3x^2y = C$$

b. Persamaan Differensial Linier dan Cara Menyelesaiannya



Lengkapilah titik pada penyelesaian persamaan differensial linier berikut ini:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 4x$$

$p(x) = -2x$ dan $q(x) = 4x$ dan merupakan fungsi kontinu,

Jadi, penyelesaian persamaan differensial adalah :

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{\int \dots dx} \left(\int \dots e^{\int \dots dx} dx + C \right)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \left(\int 4xe^{-x^2} dx + C \right), \text{ Misalkan } -x^2 = u \Rightarrow -2x dx = du$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \left(-2 \int e^{-x^2} (\dots) + C \right)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \left(-2 \int e^{\dots} d(-x^2) + C \right)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \left(-2 \int e^u du + C \right)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} (\dots + C)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} (\dots + C)$$

$$\Rightarrow y = -2 + Ce^{-x^2}$$



c. Persamaan Differensial Bernoulli dan Cara Menyelesaiakannya

Lengkapilah titik pada penyelesaian persamaan differensial bernoulli berikut ini:

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5 \Rightarrow n = 5$$

$\frac{dy}{dx} - y = xy^5$ (Bagi dengan y^5), diperoleh :

$$y^{-5} \frac{dy}{dx} - y^{-4} = x \dots\dots\dots 1)$$

$$\text{Ambil : } v = \frac{1}{y^4} = y^{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dy} = \dots$$

$$\text{Perhatikan : } \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{y^5} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-4}{y^5} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^5} \frac{dy}{dx} = \dots \frac{dv}{dx}$$

Selanjutnya substitusi ke persamaan 1), diperoleh :

$$-\frac{1}{4} \frac{dv}{dx} - v = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} + 4v = \dots$$

Berarti persamaan differensial berubah menjadi persamaan differensial linier, sehingga penyelesaian umumnya adalah :

$p(x) = 4$ dan $q(x) = -4x$ dan merupakan fungsi kontinu,

Jadi, penyelesaian persamaan differensial adalah :

$$v = e^{-\int \dots dx} \left(\int -4x e^{\int \dots dx} + C \right)$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left(\int (-4x) e^{4x} dx + C \right)$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left(\dots \int x e^{4x} dx + C \right)$$

Perhatikan :

$$\text{Ingat : } \int U dV = UV - \int V dU$$

Dimana : $U = U(x)$ dan $V = V(x)$

$$\int (\dots) e^{4x} dx = -4 \int x e^{-4x} dx$$

$$\text{misalkan : } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \int e^{4x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} e^{4x}$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left(-4 \left[\frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx \right] + C \right)$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left(-4 \left[\frac{1}{4} x e^{4x} - \dots \right] + C \right)$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left(\dots + \frac{1}{4} e^{4x} + C \right)$$

$$\Rightarrow v = (\dots) + C e^{-4x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^4} = \left(\frac{1}{4} - x \right) + C e^{-4x}$$

Persamaan Differensial Faktor Integrasi, Linier, dan Bernoulli

Selesaikanlah persamaan differensial berikut ini dengan mencocokkan antara kolom soal dengan kolom jawabannya!

Soal

1

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \cos 3x$$

2

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^4 x^5$$

3

$$(2x + 2y)dx + 2dy = 0$$

4

$$(x^2 + y) \frac{dy}{dx} = 2xy$$

Jawaban

$$\bullet \quad 2xe^x - 2x + 2ye^x = c$$

$$\bullet \quad \frac{y}{c} = e^{\frac{x^6}{y}}$$

$$\bullet \quad y = \frac{1}{3}x^3 \sin 3x + cx^2$$

$$\bullet \quad y^3 = \frac{1}{-x^6 + Cx^3}$$

Persamaan Differensial Faktor Integrasi, Linier, dan Bernoulli

Uraikanlah penyelesaian soal nomor 1 Anda pada kolom kotak di bawah ini!



Persamaan Differensial Faktor Integrasi, Linier, dan Bernoulli

Uraikanlah penyelesaian soal nomor 2 Anda pada kolom kotak di bawah ini!