



## LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD) RUMUS JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT



Mata Pelajaran : Matematika Peminatan  
Jenjang pendidikan : SMA Al-I'tishom  
Kelas/Semester : XI MIPA 3/ganjil  
Materi Pokok : Rumus jumlah dan selisih sudut  
Alokasi Waktu : 2 x 45 Menit



NAMA KELOMPOK :



NAMA ANGGOTA KELOMPOK :

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

KD 3.2 : Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus.

Tujuan Pembelajaran :

1. Peserta didik dapat **menentukan** rumus jumlah dan selisih sudut untuk sinus, cosinus, dan tangen.
2. Peserta didik dapat **memecahkan** masalah kontekstual menggunakan rumus jumlah dan selisih sudut untuk sinus, cosinus, dan tangen..

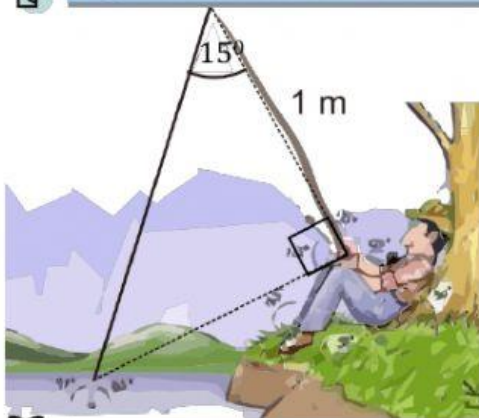
Petunjuk Umum :

Jawablah setiap pernyataan berikut dengan jalan berdiskusi dengan teman sekelompokmu !

### A. Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut



**Ayo Belajar Pemecahan Masalah !**



#### Permasalahan 1

Pada gambar 1.1 di atas, seorang memancing ikan dengan panjang galahnya 1 meter. berapakah panjang tali minimal yang dibutuhkan agar pemancing dapat memancing ikan dengan sudut antara galah dengan benang adalah  $15^\circ$ ? (minimal tali dapat menyentuh air)



**Ayo Kumpulkan Informasi !**

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari  $\cos 15^\circ$ . Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Untuk mencari nilai dari  $\sin 15^\circ$  tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$$\cos 15^\circ = \cos(\dots - \dots)$$

(Ubah  $15^\circ$  dalam penjumlahan sudut istimewa)

$$\text{Jika } \alpha = 45^\circ \text{ dan } \beta = 30^\circ$$

Jadi, berapa nilai  $\cos(\alpha - \beta)$  ?

## 1. Menentukan rumus selisih dua sudut kosinus.



**Ayo Ingat !**

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\cos(\alpha - \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi perbandingan trigonometri dan luas segitiga.

**Ingat !**

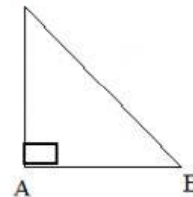
Perbandingan Trigonometri :

$$\sin \angle ABC = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \angle ABC = \frac{AB}{BC}$$

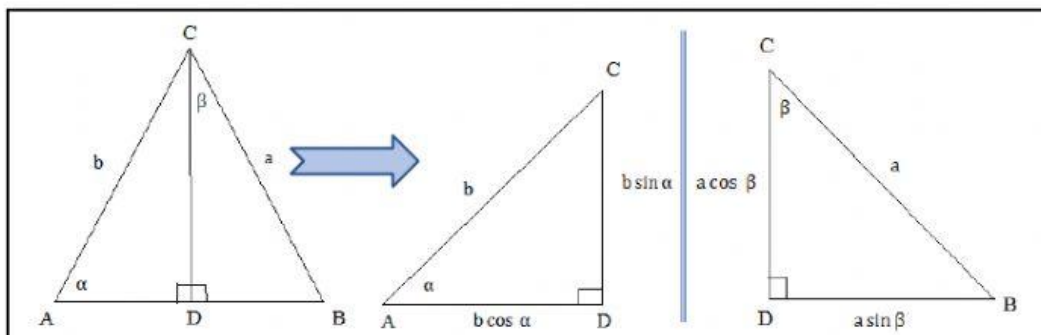
Luas Segitiga :

$$L = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$



**Amatilah !**

Perhatikan Gambar 1.2 segitiga ABC.  $\triangle ABC$  di bawah ini adalah gabungan dari  $\triangle ADC$  dan  $\triangle DBC$ .



Gambar 1.2. Segitiga ABC



**Ayo selesaikan !**

Perhatikan gambar 1.2 di atas !

Pada  $\triangle ABC$ ,  $\angle BCA = 90^\circ - \alpha + \beta = 90^\circ - (\alpha - \beta)$

Luas  $\triangle ABC = \triangle ACD + \triangle CDB$

$$= \left( \frac{1}{2} \times AD \times CD \right) + \left( \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right) + \left( \frac{1}{2} \times a \sin \beta \times a \cos \beta \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right) + \left( \frac{1}{2} \times \dots \times \dots \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} ab \cos \alpha \cos \beta \right) + \left( \frac{1}{2} ab \sin \alpha \sin \beta \right) \dots \dots \dots (1)$$

Disisi lain,

$$\begin{aligned}\text{Luas } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin \angle BCA \\ &= \frac{1}{2} ab \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\text{Luas } \triangle ABC = \triangle ACD + \triangle CDB$$

$$\frac{1}{2} ab \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) = (\frac{1}{2} a b \cos \alpha \cos \beta) + (\frac{1}{2} a b \sin \alpha \sin \beta) \leftrightarrow \text{coret } \frac{1}{2} ab$$

$$\sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$



### Coba Periksa !

Dari penemuan rumus  $\cos(\alpha - \beta)$  di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa untuk mengetahui apakah rumus yang kita peroleh tersebut benar atau tidak. Kita tahu nilai dari  $\cos 30^\circ$  adalah  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Gunakan rumus  $\cos(\alpha - \beta)$  di atas untuk mencari nilai sudut istimewa  $30^\circ$ . Jika  $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$ . Lakukan perhitungan di bawah ini.

$$\cos(90^\circ - 60^\circ) = \dots\dots\dots$$

(Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa  $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  ? )



### Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\cos(\alpha - \beta)$  adalah

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

## 2. Menentukan rumus jumlah dua sudut kosinus.



### Ayo Pikirkan !

Satu rumus sudah kalian temukan sendiri yaitu  $\cos(\alpha - \beta)$ . Selanjutnya, kamu harus pikirkan bagaimana kalau menghitung nilai dari  $\cos 75^\circ$ . Apabila nilai  $75^\circ$  dikolaborasikan dengan nilai sudut istimewa diperoleh seperti ini  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ . Artinya kalian harus menemukan rumus jumlah dua sudut dari kosinus yaitu  $\cos(\alpha + \beta)$ .



### Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\cos(\alpha + \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi sudut negatif yaitu  $\cos -\beta = \cos \beta$  dan  $\sin -\beta = -\sin \beta$



### Ayo Selesaikan !

Bentuk  $\cos(\alpha + \beta)$  dapat diubah menjadi  $\cos(\alpha - (-\beta))$

Dapat dijabarkan menggunakan rumus  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Perhatikan,  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\dots))$

= .....

= .....



### Simpulan

Jadi dapat, disimpulkan rumus  $\cos(\alpha + \beta)$  adalah

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots + \dots$$

Sehingga soal pada **permasalahan 1** dapat diselesaikan sebagai berikut :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

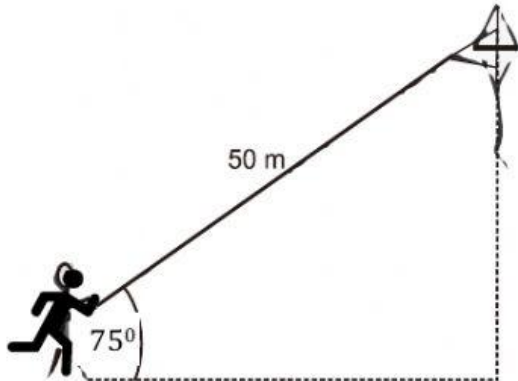
.....

.....



## Ayo Belajar Pemecahan Masalah !

### Permasalahan 2



Pada gambar disamping, seorang anak bermain layang-layang dengan panjang benang yang digunakan 50 meter dan membentuk sudut  $75^\circ$  dengan tanah. Berapakah tinggi layangan tersebut?



## Ayo Kumpulkan Informasi !

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari  $\sin 75^\circ$ . Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Untuk mencari nilai dari  $\sin 75^\circ$  tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$\sin 75^\circ = \sin(\dots + \dots)$  (Ubah  $75^\circ$  dalam penjumlahan sudut istimewa)  
Jika  $\alpha = 30^\circ$  dan  $\beta = 45^\circ$   
Jadi, berapa nilai  $\sin(\alpha + \beta)$  ?

### 3. Menentukan rumus jumlah dua sudut sinus.



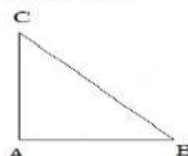
## Ayo Selesaikan !

Bagian berikutnya akan diberikan sebuah cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\sin(\alpha + \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi perbandingan trigonometri dan luas segitiga.

**Ingat !**

Perbandingan Trigonometri :

$$\sin B = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos B = \frac{AB}{BC}$$

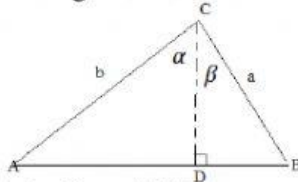


Luas Segitiga :

$$L = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$

Tugas kalian sekarang adalah mengisi titik-titik pada isian di bawah ini dengan benar. Apabila kalian mengalami kesusahan bisa diskusi dengan teman atau guru.

Amati gambar berikut !



Perhatikan  $\triangle BDC$ ,

$$\cos \beta = \frac{\dots}{\dots} \text{ sehingga } CD = \dots \dots$$

$$\sin \beta = \frac{\dots}{\dots} \text{ sehingga } BD = \dots \dots$$

Luas segitiga  $\triangle BDC$

$$L \triangle BDC = \frac{1}{2} \times BD \times CD$$

$$L \triangle BDC = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$L \triangle BDC = \dots \dots$$

Perhatikan  $\triangle ADC$ ,

$$\cos \alpha = \frac{\dots}{\dots} \text{ sehingga } CD = \dots \dots$$

$$\sin \alpha = \frac{\dots}{\dots} \text{ sehingga } AD = \dots \dots$$

Luas segitiga  $\triangle ADC$

$$L \triangle ADC = \frac{1}{2} \times AD \times CD$$

$$L \triangle ADC = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$L \triangle ADC = \dots \dots$$

$$\text{Jadi } L \triangle ADC + L \triangle BDC = \dots \dots + \dots \dots$$

$$L \triangle ADC + L \triangle BDC = \dots \dots (\dots \dots + \dots \dots) \quad \dots (1)$$

Rumus umum luas segitiga

$$L \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sin(\dots + \dots) \quad \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$L \triangle ABC = L \triangle ADC + L \triangle BDC$$

$$\frac{1}{2} \dots \dots (\dots \dots + \dots \dots) = \dots \dots (\dots \dots + \dots \dots)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots \dots + \dots \dots$$



### Coba Periksa !

Dari penemuan rumus  $\sin(\alpha + \beta)$  di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa untuk mengetahui apakah rumus yang kita peroleh tersebut benar atau tidak. Bahwa kita tahu nilai dari  $\sin 60^\circ$  adalah  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Rumus  $\sin(\alpha + \beta)$  di atas untuk mencari nilai sudut istimewa  $60^\circ$ . Jika  $60^\circ = 30^\circ + 30^\circ$ . Lakukan perhitungan di bawah ini.

$$\sin(30^\circ + 30^\circ) = \dots \dots$$

$$(\text{Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa } \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} ?)$$



### Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\sin(\alpha + \beta)$  adalah

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots \dots + \dots \dots$$

#### 4. Menentukan rumus selisih dua sudut sinus.



##### Ayo Pikirkan !

Satu rumus sudah kalian temukan sendiri yaitu  $\sin(\alpha + \beta)$ . Hal yang harus dipikirkan selanjutnya yaitu bagaimana kalau menghitung nilai dari  $\sin 15^\circ$ . Nilai  $15^\circ$  dikolaborasikan dengan nilai sudut istimewa diperoleh  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ . Artinya kalian harus menemukan pula rumus selisih dua sudut dari sinus yaitu  $\sin(\alpha - \beta)$ .  $\sin(\alpha - \beta)$  dapat diubah menjadi  $\sin(\alpha + (-\beta))$ .



##### Ayo Ingat !

Salah satu cara untuk mendapatkan rumus umum dari  $\sin(\alpha - \beta)$ . Kalian harus ingat terlebih dahulu materi sudut negatif yaitu  $\cos -\beta = \cos \beta$  dan  $\sin -\beta = -\sin \beta$



##### Ayo Selesaikan !

Dapat dijabarkan menggunakan rumus  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .

Perhatikan,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\dots))$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



##### Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\sin(\alpha - \beta)$  adalah

$$\sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

Sehingga soal pada **permasalahan 2** dapat diselesaikan sebagai berikut :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

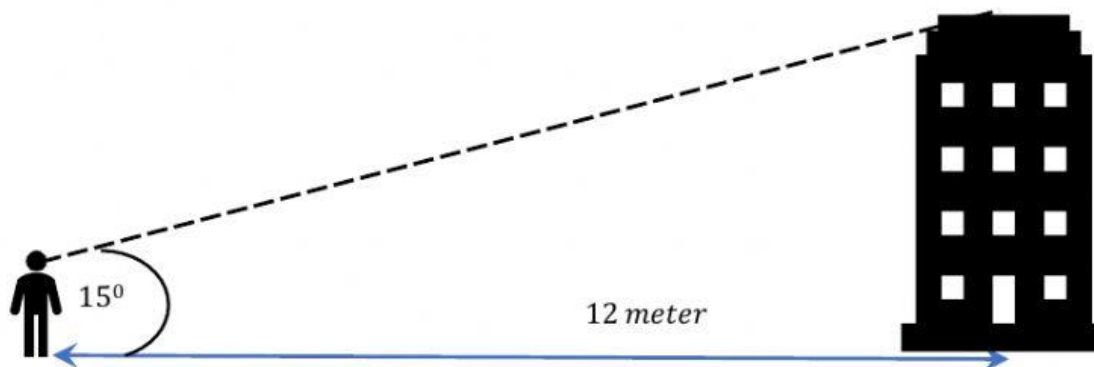
.....

.....



### Ayo Belajar Pemecahan Masalah !

#### Permasalahan 3



Seseorang melihat sebuah bangunan dari jarak 12 meter dan membentuk sudut elevasi  $15^\circ$  dengan tanah. Berapakah tinggi gedung tersebut?



### Ayo Kumpulkan Informasi !

Kendala yang diperoleh pastinya kalian kesulitan dalam menghitung nilai dari  $\tan 15^\circ$ . Biasanya kalian menghitung nilai trigonometri tanpa kalkulator untuk sudut-sudut istimewa misalnya  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Untuk mencari nilai dari  $\tan 15^\circ$  tetap menggunakan sudut-sudut istimewa.

$\sin 15^\circ = \sin(\dots - \dots)$  (Ubah  $15^\circ$  dalam penjumlahan sudut istimewa)  
 Jika  $\alpha = 45^\circ$  dan  $\beta = 30^\circ$   
 Jadi, berapa nilai  $\tan(\alpha - \beta)$  ?

## 5. Menentukan rumus jumlah dua sudut tangen.



### Ayo Pikirkan !

Bagaimana kalau rumus jumlah dan selisih dua sudut untuk tangen ? Bagaimana cara menemukan rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  dan  $\tan(\alpha - \beta)$  ?



### Ayo Nyatakan !

Rumus-rumus penjumlahan dan pengurangan pada sinus dan kosinus yang telah dibahas dapat digunakan untuk menemukan rumus penjumlahan tangen sebagai berikut :

Karena  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , maka  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$



### Ayo Selesaikan !

Akibatnya,

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \quad \text{sama-sama dibagi dengan } \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{\dots - \dots}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{1 - \dots}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\dots + \dots}{1 - \dots}$$



### Coba Periksa !

Dari penemuan rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  di atas, dapat kita verifikasi menggunakan sudut istimewa dari  $\tan 60^\circ$  adalah  $\sqrt{3}$ . Gunakan rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  di atas untuk mencari nilai sudut istimewa  $60^\circ$ .

$$\tan(30^\circ + 30^\circ) = \dots$$

(Apakah nilainya sama dengan sudut istimewa  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ?)



### Simpulan

Jadi, dapat disimpulkan rumus  $\tan(\alpha + \beta)$  adalah

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dots + \dots}{\dots - \dots}$$