

INDUKSI MATEMATIKA

Matematika

SMA/MA
Kelas XI



ISMII WAHIBATUL KHOIRIYAH
PENDIDIKAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS ISLAM MALANG

LATIHAN SOAL

➤ Kerjakan dan jawablah soal dibawah ini dengan benar !

- 1) Isilah identitas (Nama dan Kelas) pada kolom lembar jawaban yang telah disediakan.
- 2) Tersedia 90 menit untuk mengerjakan latihan soal di bawah ini.
- 3) Baca dan pahami dengan baik pernyataan dibawah ini sebelum anda menjawab.
- 4) Periksa pekerjaan anda sebelum dikumpulkan.

Nama :

Kelas :

1. Tentukan $P(k + 1)$ dari rumus $P(k) = \frac{1}{2(k+2)}$

Jawab :

$$\begin{aligned}P(k) &= \frac{\dots}{\dots (\dots + 2)} \\P(k + 1) &= \frac{1}{2((\dots + 1) + \dots)} \\&= \frac{\dots}{2(\dots + \dots)} \\&= \frac{1}{2k + 6}\end{aligned}$$

2. Buktikan pernyataan $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ untuk setiap n bilangan bulat positif.

Jawab :

- Langkah Dasar

Akan ditunjukkan bahwa $P(0)$ bernilai benar.

Untuk $n = 0$

$$\text{Maka } P(n) = 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$\begin{aligned}P(0) &= \dots = \dots - \dots \\&= \dots = \dots - 1 \\&= \dots = \dots\end{aligned}$$

Jadi $P(0)$ benar (Langkah dasar selesai).

- Langkah Induksi

Pada langkah dasar diperoleh $P(0)$ benar,

Maka akan kita asumsikan bahwa, untuk $n = k$

$$P(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = \dots - 1$$

$$P(k) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + \dots = \dots - \dots$$

Selanjutnya akan ditunjukkan, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga benar.

Dari $P(k)$ kita diperoleh,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + \dots = \dots - \dots$$

Kemudian kedua ruas ditambahkan 2^{k+1} , akibatnya

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= \dots \cdot 2^{k+1} - \dots \\ &= 2 \cdot \dots - 1 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa

$$P(k + 1) = \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots - 1$$

Memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka

$P(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^k + \dots = \dots - 1 + 2^{k+1}$ adalah benar, untuk setiap k bilangan bulat positif.

Karena $P(n) = \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = 2^{n-1} - 1$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka $P(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + \dots = \dots - 1$ adalah benar, dengan n bilangan bulat positif.

3. Dalam kegiatan vaksinasi gratis dirumah sakit sejahtera masyarakat antusias untuk melakukan vaksinasi. Sebelum melakukan vaksinasi, terlebih dahulu melakukan pengambilan nomor disatpam yang telah ditugaskan. Banyaknya masyarakat yang daftar tersebut dapat dinyatakan dengan jumlah barisan seperti berikut : $P(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$ buktikan dengan menggunakan induksi matematika.

Jawab :

- Langkah dasar

$$\text{Misalkan } P(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \dots = \frac{\dots(\dots + \dots)}{\dots}$$

$$\text{Untuk } n = 1, \text{ maka } P(1) = \frac{\dots(\dots + \dots)}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = 1$$

Jadi $P(1)$ bernilai benar (Langkah dasar selesai).

- Langkah induksi

Akan ditunjukkan bahwa untuk bilangan asli $n = k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k + 1)$ juga benar.

Misalkan bahwa $P(k)$ diasumsikan bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, yaitu

$$P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \dots = \frac{\dots (\dots + 1)}{2}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$ maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar, yaitu

$$P(k + 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (\dots + \dots) \\ = \frac{(\dots + 1)((k + \dots) + 1)}{2}$$

Atau ekuivalen dengan

$$P(k + 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \dots + (\dots + \dots) = \frac{(k + \dots)(\dots + 2)}{2}$$

Karena $P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \dots = \frac{k(\dots + 1)}{2}$ adalah pernyataan yang benar. Maka $P(k + 1)$ adalah

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (\dots + \dots) \\ = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k) + (\dots + 1) \\ = \frac{k(\dots + 1)}{2} + (\dots + 1) \\ = \frac{\dots (\dots + 1)}{2} + \frac{2(k + \dots)}{2} \\ = \frac{\dots + k}{2} + \frac{\dots + 2}{2} \\ = \frac{k^2 + \dots + 2}{2} \\ = \frac{(\dots + 1)(k + \dots)}{2}$$

Jadi $P(\dots + \dots)$ bernilai benar. (Langkah induksi selesai).

Maka menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \dots = \frac{\dots(n + 1)}{2}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

4. Tunjukkan menggunakan induksi matematika bahwa $11^n - 6$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

Jawab :

Misalkan $P(n) = 11^n - 6$, dengan n bilangan asli.

- Langkah dasar

Misalkan untuk $n = 1$

Maka $P(n) = 11^n - 6$

$$P(\dots) = \dots - \dots$$

$$= \dots - \dots$$

$$= \dots \text{ (habis dibagi 5)}$$

Jadi $P(1)$ benar, habis dibagi 5 (Langkah dasar selesai).

- Langkah Induksi

Misalkan untuk $n = 2$

Maka $P(n) = 11^n - 6$

$$P(\dots) = \dots - \dots$$

$$= \dots - \dots$$

$$= \dots \text{ (habis dibagi 5)}$$

Karena $P(2)$ benar, sehingga dapat disimpulkan $P(k) = \dots - \dots$ benar, untuk k bilangan asli. Selanjutnya akan dibuktikan jika $P(k) = \dots - \dots$

habis dibagi 5, maka $P(k + 1) = 11^{(\dots + \dots)} - \dots$ habis dibagi 5.

Karena $11^k - 6$ habis dibagi 5, misalkan $11^k - 6 = 5m$, untuk m bilangan bulat positif.

$$P(k + 1) = 11^n - 6$$

$$= 11^{\dots + \dots} - \dots$$

$$= 11^k(\dots) - \dots$$

$$= (\dots \dots + \dots)(11) - 6 \text{ (karena misal } 11^k = 5m + 6)$$

$$= \dots m + \dots$$

$$= 5(\dots m + \dots)$$

Dengan demikian $P(k + 1) = \dots^{(k+1)} - \dots$ dapat dinyatakan sebagai kelipatan 5, yaitu $5(\dots m + 12)$.

Jadi benar $P(k + 1) = \dots^{(\dots + \dots)} - \dots$ habis dibagi 5.

Karena $P(n) = 11^n - 6$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka terbukti $P(n) = \dots^n - \dots$ habis dibagi 5, untuk n bilangan asli.

5. Buktikan kebenaran pernyataan $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ untuk sebarang bilangan asli n .

Jawab :

Misalkan $P(n) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

- Langkah dasar

Untuk $n = 1$, maka $P(1) = \dots (\dots + \dots) = \dots (\dots)$

Jadi $n = \dots$ benar (langkah dasar selesai)

- Langkah induksi

Untuk $n = k$, dengan k adalah sebarang bilangan asli

Maka $P(n) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

$$P(k) = 2 + 4 + 6 + \dots + \dots = \dots (\dots + 1), n = k \text{ benar}$$

Untuk $n = k + 1$, Maka

$$P(k + 1) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + \dots (\dots + \dots) = (\dots + \dots)(k + 2)$$

$$= 2 + 4 + 6 + \dots + \dots + 2(k + 1)$$

$$= (2 + 4 + 6 + \dots + 2k) + \dots (k + 1)$$

$$= k(\dots + \dots) + 2(\dots + \dots)$$

$$= k^2 + \dots + \dots + \dots$$

$$= \dots + \dots + \dots$$

$$= (k + \dots)(\dots + 2)$$

Kedua ruas dari $P(k + 1)$ sama, maka $P(k + 1)$ bernilai benar (Langkah induksi selesai). Karena prinsip induksi matematika terpenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.