

PERSAMAAN TRIGONOMETRI

Matematika Minat

Kelas 11

MATH WORKSHEETS

(E-LKS MATEMATIKA)

By: Wulan Dini


B. Persamaan trigonometri bentuk kuadrat



#TRIGONOMETRI

Persamaan Kuadrat

$$A \sin^2 x + B \sin x + C = 0$$
$$A \cos^2 x + B \cos x + C = 0$$
$$A \tan^2 x + B \tan x + C = 0$$



Selain persamaan trigonometri bentuk dasar yang sudah kita pelajari sebelumnya, ada bentuk persamaan trigonometri lain yaitu dalam bentuk kuadrat, atau persamaan trigonometri yang mengharuskan kita untuk mengubahnya menjadi persamaan kuadrat sehingga penyelesaian bisa kita peroleh dengan menggunakan aturan dalam persamaan kuadrat.

Oleh karena itu kalian harus sudah memahami tentang pemfaktoran dan menguasai identitas trigonometri dengan baik.

Perlu diingat juga bahwa rentang nilai trigonometri adalah

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ dan } -1 \leq \cos x \leq 1$$

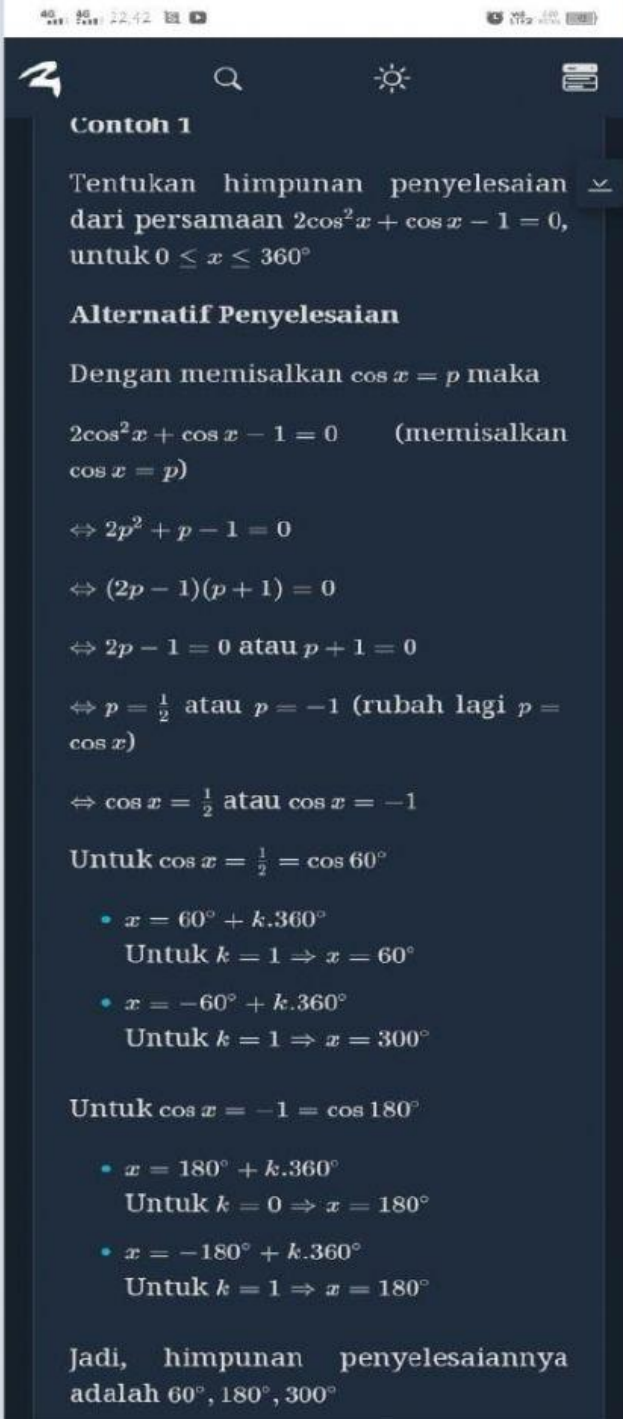
Dan tak kalah penting juga untuk diingat Kembali terkait identitas trigonometri diantaranya:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Begitu pula:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \text{dan} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Perhatikan contoh soal berikut!



Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian \surd dari persamaan $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$

Alternatif Penyelesaian

Dengan memisalkan $\cos x = p$ maka

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad (\text{memisalkan } \cos x = p)$$
$$\Leftrightarrow 2p^2 + p - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2p - 1)(p + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2p - 1 = 0 \text{ atau } p + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \text{ atau } p = -1 \text{ (rubah lagi } p = \cos x)$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ atau } \cos x = -1$$

Untuk $\cos x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

- $x = 60^\circ + k.360^\circ$
Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 60^\circ$
- $x = -60^\circ + k.360^\circ$
Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 300^\circ$

Untuk $\cos x = -1 = \cos 180^\circ$

- $x = 180^\circ + k.360^\circ$
Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 180^\circ$
- $x = -180^\circ + k.360^\circ$
Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 180^\circ$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$

Contoh Soal 2

Tentukan himpunan penyelesaian untuk $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Alternatif penyelesaian:

Misal $p = \cos x$

$$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$$

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p - 2)(p + 1) = 0$$

$$p_1 = 2 \text{ atau } p_2 = -1$$

$$\cos x = 2 \text{ atau } \cos x = -1$$

($\cos x = 2$ tidak memenuhi)

$$\text{Sehingga } \cos x = -1$$

$$x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

diperoleh nilai $x = 180^\circ$ atau himpunan penyelesaiannya $\{180^\circ\}$

Ingat, nilai $-1 \leq \cos x \leq 1$

Kalian juga bisa tonton penjelasan dari youtube terkait contoh soal dari persamaan trigonometri berikut!



Sekarang silakan kalian coba kerjakan soal-soal berikut!

Agar kalian dapat lebih memahami penyelesaian persamaan trigonometri bentuk kuadrat dengan baik, silakan coba kalian kerjakan soal berikut ini

Catatan: Isi dengan benar kotak yang disediakan

Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan trigonometri bentuk kuadrat berikut!

1. $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Penyelesaian:

Misalkan $p =$, maka:

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$2^2 - 5 + 2 = 0$$

$$(\quad)(\quad) = 0$$

$$\quad \text{atau} \quad \quad$$

$$\quad \text{atau} \quad \quad$$

$$\quad$$

Karena $p = \cos x$, maka

\quad atau \quad (untuk \quad tidak ada nilai yang memenuhi)

\quad Jadi, $\alpha =$ $^\circ$

- $x = \alpha + k.360^\circ$
 $x = \quad + k. \quad^\circ$
untuk $k = 0$, diperoleh $x =$ $^\circ$

- $x = -\alpha + k.360^\circ$
 $x = \quad + k. \quad^\circ$
Untuk $k = 1$, diperoleh $x =$ $^\circ$

Jadi, HP = { $^\circ$, $^\circ$ }

2. $\tan^2 x - 2 \tan x = -1$ untuk $0^\circ \leq x \leq 540^\circ$

Penyelesaian:

Kita ubah dulu bentuk $\tan^2 x - 2 \tan x = -1$ menjadi

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

Misalkan $p =$, maka:

$$\tan^2 x - 2 \tan x = -1$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0 \quad (\text{pindah ruaskan } -1 \text{ ke sebelah kiri})$$

$$2 \quad$$

$$(\quad)(\quad) = 0$$

atau

atau

Karena $p =$, maka

Jadi, $\alpha = 0$

- $x = \alpha + k \cdot 180^\circ$
 $x = + k \cdot 0$
untuk $k = 0$, diperoleh $x = 0$
untuk $k = 1$, diperoleh $x = 0$
untuk $k = 2$, diperoleh $x = 0$

Jadi, HP = { $0, 0, 0$ }

3. $2 \cos^2 x - 9 \sin x + 3 = 0$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Penyelesaian:

$$2 \cos^2 x - 9 \sin x + 3 = 0$$

$$2(\quad^2) = 0 \quad (\text{ubah } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$$

$$2 - 2\sin^2 x - + = 0$$

$$-2\sin^2 x - + = 0$$

$$2\sin^2 x + - = 0 \quad (\text{kalikan semua dengan } -1)$$

Misalkan $p =$, maka:

$$2\sin^2 x + - = 0$$

$$2^2 + - = 0$$

$$(\quad)(\quad) = 0$$

atau

atau

Karena $p = \sin x$, maka

atau (untuk tidak ada nilai yang memenuhi)

Jadi, $\alpha = 0$

- $x = \alpha + k \cdot 360^\circ$
 $x = + k \cdot 0$

untuk $k = 0$, diperoleh $x = 0^\circ$

- $x = (180^\circ - \alpha) + k \cdot 360^\circ$
 $x = (180^\circ - 120^\circ) + k \cdot 360^\circ$

$$x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Untuk $k = 0$, diperoleh $x = 60^\circ$

Jadi, HP = $\{0^\circ, 60^\circ\}$