VECTORES

Queridos estudiantes en este contenido identificaremos las características de las magnitudes vectoriales, a través de la comprensión y análisis de la guía didáctica, para resolver los ejercicios de la práctica y evaluación.

Sabías que...?

El curso de un avión está determinado vectorialmente, de lo contrario un piloto tendría que memorizar las montañas y ciudades que se observan desde la altitud, generándole dificultades en días nublados para navegar.
Un capitán de un barco en altamar utiliza vectores para orientarse en medio de la nada, aunque en la actualidad esta función la realizan instrumentos tecnológicos como los GPS.

¿Qué es un vector?

Vector es aquel elemento matemático, indicado por un segmento orientado que nos permite representar gráficamente a una magnitud vectorial.

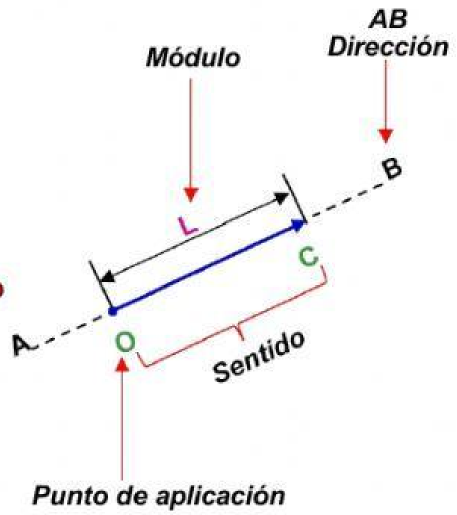
Los vectores se representan gráficamente por segmentos de una línea recta que tiene la misma dirección que el vector (indicada por una flecha) y una longitud proporcional a la magnitud. En la escritura, una letra del abecedario mayúscula o minúscula en negrilla como por ejemplo:

A (en negrilla o tipo grueso)
$\vec{A}$, $\vec{a}$ (normal o tipo delgado con una flecha encima)

Indica un vector (es decir, magnitud, dirección y sentido), mientras que A , a se refiere a la magnitud solamente; sin embargo, algunas veces, la magnitud suele representarse por:

$$|\mathbf{A}| \quad \text{o también} \quad |\vec{A}|$$

ELEMENTOS DE UN VECTOR



Los elementos de un vector son:

Punto de aplicación: Llamado también origen es el punto donde se supone actúa el vector; este punto puede ser variable en su posición. En el gráfico es el punto O.

Módulo o intensidad: Está representado por el tamaño del vector, y hace referencia a la intensidad de la magnitud (número). En el gráfico está representado por L.

Sentido: Está indicado por la punta de la flecha (signo positivo que por lo general no se coloca, o un signo negativo). No corresponde comparar el sentido de dos vectores que no tienen la misma dirección, de modo que se habla solamente de vectores con el mismo sentido o con sentido opuesto. En el gráfico el sentido es de O a C.

Dirección: Corresponde a la inclinación de la recta, y representa al ángulo entre ella y un eje horizontal imaginario. En nuestro caso, la recta que contiene al vector es la recta AB.

REPRESENTACIÓN DE VECTORES

a) Representación gráfica

Un vector se representa gráficamente, como un segmento dirigido de recta de un punto llamado punto inicial u origen a otro punto llamado punto terminal o término. Una punta de flecha en un extremo indica el sentido; la longitud del segmento, interpretada con una escala determina la magnitud. La dirección del vector se especifica al dar los ángulos que forma el segmento de recta con los ejes de coordenadas.

b Representación rectangular o cartesiana

Para esta forma de representación es necesario tomar como referencia un sistema de ejes coordenados rectangulares, en estas condiciones se dice que un vector está representado en forma rectangular o cartesiana cuando viene definido por un par ordenado (x, y) o una terna (x, y, z) según se trate del plano o del espacio respectivamente. Este par o terna representa el extremo final del vector, pues el origen siempre estará ubicado en el origen del sistema de coordenadas (0, 0) en el plano y (0, 0, 0) en el espacio. Su notación es:

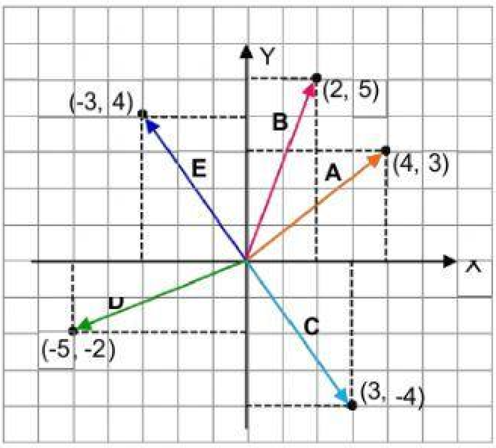
$\mathbf{A} = (A_x, A_y)$ Representa un vector en el espacio.

$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ Representa un vector en el espacio.

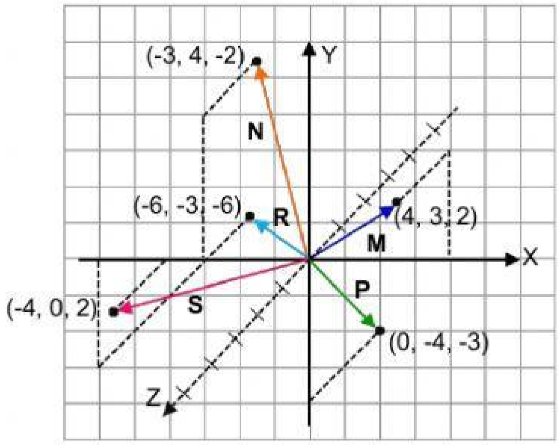
Ejemplos.- Representar los siguientes vectores:

A = (4 , 3) ; **B =** (2 , 5) ; **C =** (3 , -4) ; **D =** (-5 , -2) ; **E =** (-3 , 4)

M = (4 , 3 , 2) ; **N =** (-3 , 4 , -2) ; **R =** (-6 , -3 , -6) ; **S =** (-4 , 0 , 2) ; **P =** (0 , -4 , -3)



Vectores en el plano



Vectores en el espacio

c Representación polar

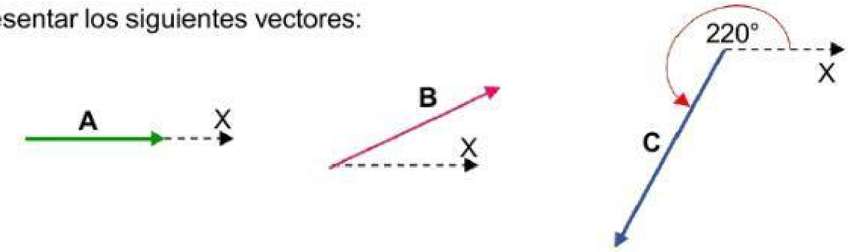
Un vector **A** está representado en forma polar cuando viene definido por un par ordenado (A,θ) donde A representa su magnitud y θ el ángulo que forma con una recta de referencia (generalmente se toma como referencia el eje positivo X). Su notación es: **A** = (A,θ)

Ejemplos.- Representar los siguientes vectores:

A = (60, 0°)

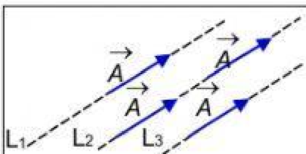
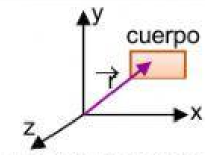
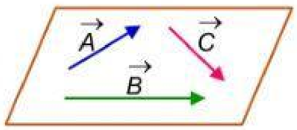
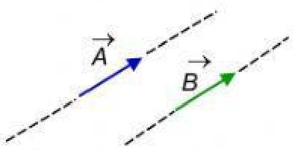
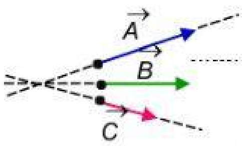
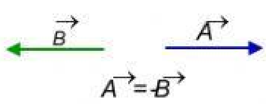
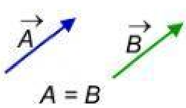
B = (90, 35°)

C = (180, 220°)



CLASES DE VECTORES

1. **Vectores libres.-** Son aquellos vectores que pueden moverse libremente en el espacio con sus líneas de acción paralelas.
2. **Vectores posición.-** Llamados "vectores fijos" tienen la dirección, el sentido y el punto de aplicación invariable e inamovible.
3. **Vectores paralelos.-** Son aquellos que tienen sus líneas de acción, respectivamente paralelas.
4. **Vectores coplanares.-** Son aquellos que se encuentran contenidos en un mismo plano.
5. **Vectores concurrentes.-** Son aquellos cuyas líneas de acción de cortan en un mismo punto.
6. **Vectores colineales.-** Son aquellos que se encuentran contenidos en una misma línea de acción.
7. **Vectores iguales.-** Son aquellos vectores que tienen la misma magnitud, dirección y sentido aunque no tengan el mismo punto de aplicación.
8. **Vectores opuestos.-** Son aquellos que presentan igual módulo.

 **Vectores libres**	 **r = vector posición**	 **Vectores coplanares**
 **Vectores paralelos**	 **Vectores concurrentes**	 **Vectores colineales**
 **Vectores opuestos**	 **Vectores iguales**	

OPERACIONES CON VECTORES

A MÉTODOS GRÁFICOS

Para sumar vectores estudiaremos los métodos gráficos: método del paralelogramo, del triángulo y del polígono

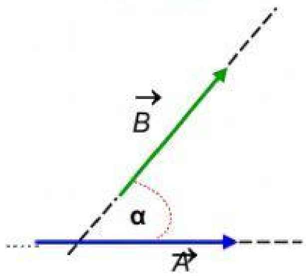
SUMA DE VECTORES

La operación de suma de dos o más vectores da como resultado otro vector. Para realizar la suma de vectores existen distintos métodos, ya sea de manera algebraica o mediante el uso de geometría analítica.

a) Método del paralelogramo.- Se emplea para sumar o restar dos vectores coplanares y concurrentes.

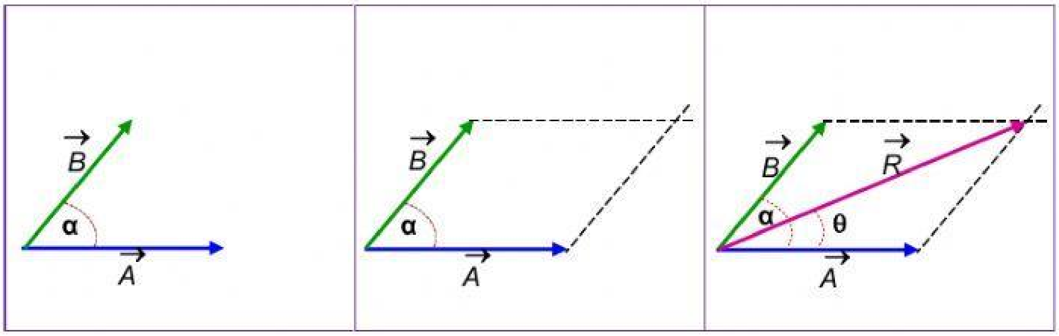
Sean A y B dos vectores que forman un ángulo α, se procede como:

Procedimiento:

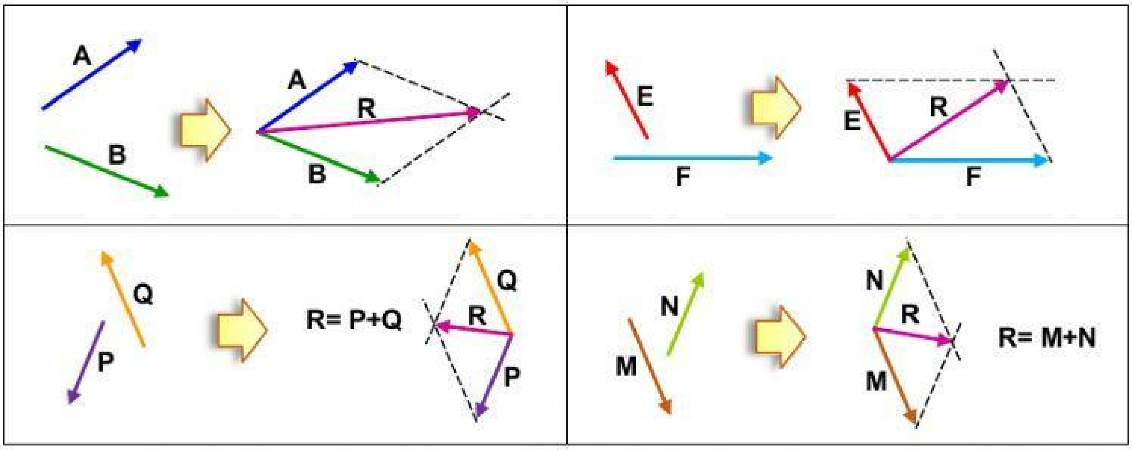


1. Se juntan los orígenes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, conservando el ángulo α que ambos forman.
2. Del extremo de cada vector se traza una línea paralela al otro vector, formando un paralelogramo.
3. El vector resultante comienza en el origen común y termina en la intersección de las líneas trazadas.
4. Vectorialmente la resultante se expresa como:
   $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$
   Nota: En esta ecuación, no deben reemplazarse los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
5. El módulo de la resultante se obtiene midiendo con una regla, luego convertir con la escala a las unidades dadas.

Escanea el QR



Ejemplos.- Sumar los siguientes vectores, esto es hallar la resultante **R**.

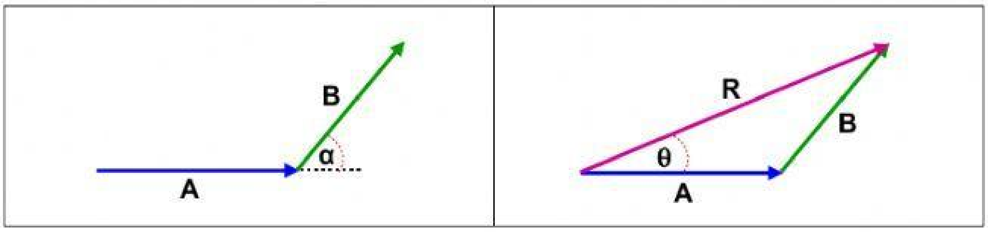


b) **Método del triángulo.-** Se emplea para sumar o restar dos vectores ordenados secuencialmente.

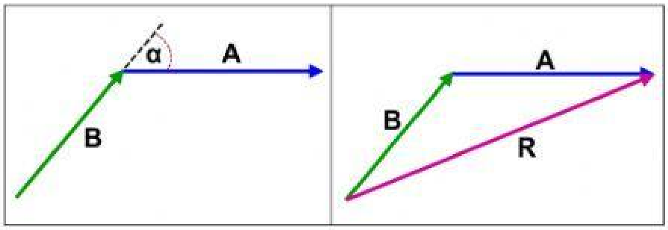
Sean **A** y **B** dos vectores que forman un ángulo α, se procede como:

Procedimiento:

1. Se ordenan los vectores **A** y **B**, dibujando un vector después del otro.
2. El vector resultante se traza desde el primer origen hasta el último extremo.



3. El orden de colocación de los vectores, no altera la suma:

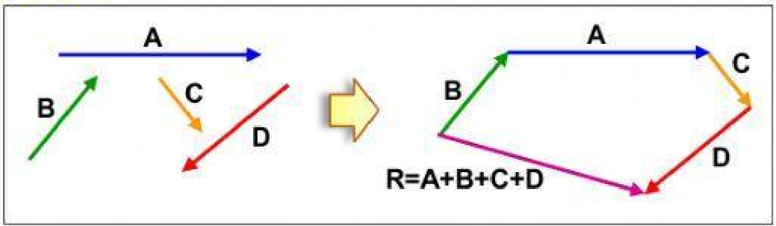


Escanea el QR

4. Vectorialmente la resultante se expresa como: **R= A+B**

c) **Método del polígono.-** Consiste en trazar los vectores uno a continuación del otro conservando sus magnitudes, direcciones y sentidos (conservando el sentido de los positivos pero invirtiendo el de los negativos); luego se une el origen del primero con la punta del último, el vector así trazado, es el vector resultante.

Ejemplo.- Sean los vectores:



Escanea el QR

Diferencia de vectores.- La diferencia de vectores es un caso particular de la suma; si se tiene los vectores **A** y **B.**

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

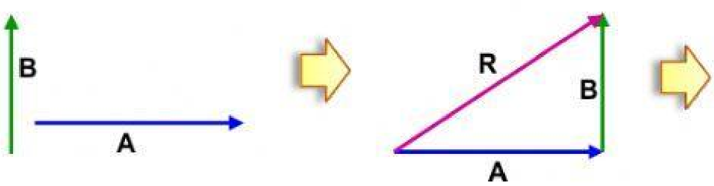
O sea se convierte en adición al sumar al primer vector el opuesto del segundo.

Ejemplo.- Hallar: **A** – **B**

B MÉTODOS ANALÍTICOS

Para realizar operaciones con vectores mediante los métodos analíticos, debes conocer o tener nociones generales sobre las ***funciones trigonométricas***

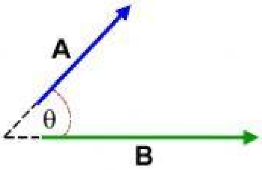
a) Teorema de Pitágoras.- Este teorema se aplica para hallar la resultante de dos vectores si éstos son ortogonales, es decir forman un ángulo recto (90°) entre sí. En efecto, si se tiene los módulos de los vectores **A** y **B**:

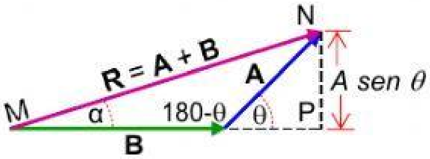


La resultante **R** será:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

b) Teorema de Cosenos.- Este teorema se utiliza para hallar la resultante de dos vectores en el caso de que éstos no sean ortogonales, es decir el ángulo que formen entre si sea diferente de 90°.





Escanea el QR

Si se trabaja con el ángulo que forman los dos vectores dados es decir con el ángulo θ, la fórmula para determinar será:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

En el caso que se trabaje con el suplemento de θ ó sea $180-\theta$ la fórmula para el cálculo de la resultante será:

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2AB\cos(180 - \theta)}$$

Esta utima fórmula (2) llega a ser la misma que la primera (1); en efecto: $\cos(180\text{-}\theta) = -\cos\theta$, po propiedad de reducción de ángulos al primer cuadrante.

Reemplazando este valor en la ecuacion (2) se tiene:

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2AB(-\cos\theta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

Para calcular el ángulo formado por la resultante y el vector B, el triángulo MPN se tiene:

$$sen\alpha = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{MP}} = \frac{A\,sen\theta}{R} = \frac{A\,sen\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = inv\,sen\left[\frac{A\,sen\theta}{R}\right]}$$

c) Teorema de senos.- Hallada la resultante de una suma o diferencia de vectores por el método gráfico del triángulo, puede aplicarse la ley de los senos para hallar analíticamente el valor de la resultante.

El teorema dice:

"En un triángulo cualquiera los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos"