

5

รูปแบบประพจน์ ที่สมมูลกัน

Logically Equivalence

รูปแบบของประพจน์สองรูปแบบใด ๆ ที่มีค่าความจริงตรงกันทุก ๆ กรณี สามารถใช้แทนกันได้ จะเรียกสองรูปแบบของประพจน์ดังกล่าวว่า “รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน”

สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงแทนการสมมูลคือ “ $\equiv$ ”

การตรวจสอบความสมมูลของประพจน์มีหลายวิธี เช่น การตรวจสอบโดยใช้ตาราง โดยการลดรูปประพจน์

1 การตรวจสอบความสมมูลโดยการสร้างตาราง

การตรวจสอบการสมมูลนั้น เราจะใช้วิธีการสร้างตารางค่าความจริงของทั้งสองประพจน์ เพื่อเปรียบเทียบค่าความจริง โดยประพจน์สองประพจน์จะสมมูลกัน เมื่อมีความจริงเหมือนกันทุกกรณี

ตัวอย่างที่ 1

กำหนด p, q เป็นประพจน์ ให้พิจารณาประพจน์ $p \vee \sim q$ และ $\sim(\sim p \wedge q)$ สมมูลกันหรือไม่

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $p \vee \sim q$ และ $\sim(\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F

จะเห็นได้ว่า ค่าความจริงของประพจน์ $p \vee \sim q$ และ $\sim(\sim p \wedge q)$ ตรงกันทุกกรณี ดังนั้น $p \vee \sim q$ สมมูล $\sim(\sim p \wedge q)$ หรือ $p \vee \sim q \equiv \sim(\sim p \wedge q)$

แบบฝึกทักษะ

เรื่อง รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน

คำสั่ง จงตรวจสอบว่าประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

1) $p \rightarrow q$ และ $q \vee \sim p$

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$q \vee \sim p$

ดังนั้น ☐ $p \rightarrow q \equiv q \vee \sim p$

☐ $p \rightarrow q \not\equiv q \vee \sim p$

2) $p \vee (\sim p \wedge q)$ และ $p \vee q$

p	q	$\sim p$	$(\sim p \wedge q)$	$p \vee (\sim p \wedge q)$	$p \vee q$

ดังนั้น ☐ $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

☐ $p \vee (\sim p \wedge q) \not\equiv p \vee q$

3) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$ และ $p \vee \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(q \rightarrow p)$	$\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$p \vee \sim q$

ดังนั้น ☐ $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv p \vee \sim q$

☐ $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p) \not\equiv p \vee \sim q$

4) $p \rightarrow (q \vee r)$ และ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

ดังนั้น ☐ $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

☐ $p \rightarrow (q \vee r) \not\equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

ตัวอย่างที่ 2

ให้ตรวจสอบว่าข้อความที่กำหนดให้ สมมูลกันหรือไม่

(ก) ถ้า $4 + 3 = 7$ แล้ว 7 เป็นจำนวนนับ

(ข) 7 ไม่ใช่จำนวนนับ แต่ $4 + 3 = 7$

วิธีทำ ให้ p แทน $4 + 3 = 7$ q แทน 7 เป็นจำนวนนับ

นั่นคือ ประโยค (ก) แทนด้วย $p \rightarrow q$

(ข) แทนด้วย $\sim q \wedge p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F

จะเห็นว่า ค่าความจริงของประพจน์ $p \vee \sim q$ และ $\sim(\sim p \wedge q)$ ตรงกันทุกกรณี

ดังนั้น $p \vee \sim q$ สมมูล $\sim(\sim p \wedge q)$ หรือ $p \vee \sim q \equiv \sim(\sim p \wedge q)$

ตัวอย่างที่ 2

ให้ตรวจสอบว่าข้อความที่กำหนดให้ สมมูลกันหรือไม่

(ก) ถ้า $4 + 3 = 7$ แล้ว 7 เป็นจำนวนนับ

(ข) 7 ไม่ใช่จำนวนนับ แต่ $4 + 3 = 7$

วิธีทำ ให้ p แทน $4 + 3 = 7$ q แทน 7 เป็นจำนวนนับ

นั่นคือ ประโยค (ก) แทนด้วย $p \rightarrow q$

(ข) แทนด้วย $\sim q \wedge p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F

จะเห็นว่า ค่าความจริงของประพจน์ $p \vee \sim q$ และ $\sim(\sim p \wedge q)$ ตรงกันทุกกรณี

ดังนั้น $p \vee \sim q$ สมมูล $\sim(\sim p \wedge q)$ หรือ $p \vee \sim q \equiv \sim(\sim p \wedge q)$

5) (ก) $\sqrt{2}$ หรือ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ (ข) $\sqrt{2}$ หรือ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

6) (ก) ถ้า $2 + 1 = 3$ แล้ว 3 เป็นจำนวนนับ (ข) 3 ไม่ใช่จำนวนนับ แต่ $2 + 1 = 3$

7) (ก) 4 เป็นจำนวนคู่ และ เป็นจำนวนเต็ม (ข) 4 เป็นจำนวนคี่หรือไม่ใช่จำนวนเต็ม

5) (ก) $\sqrt{2}$ หรือ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ (ข) $\sqrt{2}$ หรือ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

6) (ก) ถ้า $2 + 1 = 3$ แล้ว 3 เป็นจำนวนนับ (ข) 3 ไม่ใช่จำนวนนับ แต่ $2 + 1 = 3$

7) (ก) 4 เป็นจำนวนคู่ และ เป็นจำนวนเต็ม (ข) 4 เป็นจำนวนคี่หรือไม่ใช่จำนวนเต็ม