



Nombre: Samuel Pazmiño	Licenciada: Lilia Juca
Tema: Derivada por definición	Curso: 2 ^{do} BGU "A"

Definición de derivada: Es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función matemática, según se modifique el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. El valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente, ya que se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Es decir, qué tan rápido se está produciendo una variación.

Dada una función f definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}$, esta es derivable en $x \in A$ si y solo si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En tal caso, este límite es notado $\frac{df}{dx}(x)$, $f'(x)$ llamado derivada en f en x .

El proceso de cálculo de la derivada consiste en formar el cociente incremental:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donde $x \in A$, $h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$, $x+h \in A$.

A continuación, se realizan los cálculos pertinentes en el cociente incremental, para simplificar. Luego se hace $|h|$ suficiente pequeño, y se calcula

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo: $f(x) = (x+2)^3$

Evalúe los límites del numerador y el denominador por separados. Dado que la expresión es una forma indeterminada, intente transformar la expresión.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(x+h+2)^3 - (x+2)^3}{h} \right) =$$

Expanda el trinomio utilizando la fórmula.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(x+h+2)^3 - (x+2)^3}{h} \right) \\ &= \left(\frac{x^3 + h^3 + 8 + 3h^2x + 6x^2 + 3hx^2 + 6h^2 + 12x + 12h + 12hx - (x+2)^3}{h} \right) \\ &= \left(\frac{x^3 + h^3 + 8 + 3h^2x + 6x^2 + 3hx^2 + 6h^2 + 12x + 12h + 12hx - (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)}{h} \right) = \end{aligned}$$

Cuando hay un $-$ delante de una expresión en paréntesis, cambie el signo de cada término de la expresión y elimine el paréntesis.

$$\left(\frac{x^3 + h^3 + 8 + 3h^2x + 6x^2 + 3hx^2 + 6h^2 + 12x + 12h + 12hx - x^3 - 6x^2 - 12x - 8}{h} \right) =$$

Simplificamos.

$$\left(\frac{\cancel{x^3} + h^3 + \cancel{0} + 3h^2x + 6\cancel{h^2} + 3hx^2 + 6h^2 + 1\cancel{h}x + 12h + 12hx - \cancel{x^3} - 6\cancel{h^2} - 1\cancel{h}x - \cancel{0}}{h} \right) =$$

Dado que dos números opuestos suman 0, elimínalos de la expresión.

$$\left(\frac{h^3 + 3x^2h + 3xh^2 + 6h^2 + 12h + 12xh}{h} \right) =$$

Saca el factor común h de la expresión.

$$\left(\frac{h(h^2 + 3x^2 + 3xh + 6h + 12 + 12x)}{h} \right) =$$

Cancela el factor común h.

$$\left(\frac{\cancel{h}(h^2 + 3x^2 + 3xh + 6h + 12 + 12x)}{\cancel{h}} \right) =$$

Usando $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x)) \pm \lim_{x \rightarrow c} (g(x))$, transforme la expresión.

$$(h^2 + 3x^2 + 3xh + 6h) + \lim_{h \rightarrow 0} (12) + \lim_{h \rightarrow 0} (12x) =$$

El límite de una constante es igual a la constante.

$$\begin{aligned} (h^2 + 3x^2 + 3xh + 6h) + \lim_{h \rightarrow 0} (12) + 12x &= (h^2 + 3x^2 + 3xh) + \lim_{h \rightarrow 0} (6h) + \lim_{h \rightarrow 0} (12) + 12x \\ &= (h^2 + 3x^2 + 3xh) + \lim_{h \rightarrow 0} (6h) + 12 + 12x = (h^2 + 3x^2) + \lim_{h \rightarrow 0} (3xh) + \lim_{h \rightarrow 0} (6h) + 12 + 12x = \end{aligned}$$

Usando $\lim_{x \rightarrow c} (a \times f(x)) = a \times \lim_{x \rightarrow c} (f(x))$, transforme la expresión.

$$\begin{aligned} (h^2 + 3x^2) + \lim_{h \rightarrow 0} (3xh) + 6 \times \lim_{h \rightarrow 0} (h) + 12 + 12x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2) + \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2) + \lim_{h \rightarrow 0} (3xh) + 6 \times \lim_{h \rightarrow 0} (h) + 12 + 12x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2) + \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2) + 3x \times \lim_{h \rightarrow 0} (h) + 6 \times \lim_{h \rightarrow 0} (h) + 12 + 12x \end{aligned}$$

Evalúe el límite sustituyendo el valor h=0 en la expresión.

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h^2) + \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2) + 3x \times \lim_{h \rightarrow 0} (h) + 6 \times 0 + 12 + 12x =$$

Usando $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)^a) = (\lim_{x \rightarrow c} (f(x)))^a$, transforme la expresión.

$$\begin{aligned} \left(\lim_{h \rightarrow 0} (h) \right)^2 + \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2) + 3x \times \lim_{h \rightarrow 0} (h) + 6 \times 0 + 12 + 12x \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} (h) \right)^2 + 3x^2 + 3x \times \lim_{h \rightarrow 0} (h) + 6 \times 0 + 12 + 12x \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} (h) \right)^2 + 3x^2 + 3x \times 0 + 6 \times 0 + 12 + 12x = 0^2 + 3x^2 + 3x \times 0 + 6 \times 0 + 12 + 12x = \end{aligned}$$

Simplificar la expresión.

$$= 0^2 + 3x^2 + 3x \times 0 + 6 \times 0 + 12 + 12x =$$

Respuesta.

$$3x^2 + 12 + 12x$$

Realizar el siguiente ejercicio y colocar en la casilla según corresponda.

$$F(x) = x^2 - 4x - 5$$

1

2

3

4

5

6

7

$$F'(x) = \frac{2xh + h^2 - 4h}{h}$$

$$F'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = \frac{h(2x + h - 4)}{h}$$

$$F'(x) = 2x + 0 - 4$$

$$F'(x) = \frac{\cancel{x}^2 + 2xh + h^2 - 4\cancel{x} - 4h - \cancel{x}^2 + 4\cancel{x} - \cancel{h}}{h}$$

$$F'(x) = \frac{h(2x + h^2 - 4h)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{(x + h)^2 - 4(x + h) - 5 - (x^2 - 4x - 5)}{h}$$