

Chủ đề 1. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

(ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN)

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

a) Diện tích hình phẳng

- Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường:
 - Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.
 - Trục hoành.
 - Hai đường thẳng $x = a, x = b$.

là:
$$S = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1)$$

- Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường:
 - Đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.
 - Hai đường thẳng $x = a, x = b$.

là:
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (2)$$

Chú ý:

- Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì:
$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

• Trong các công thức tính diện tích ở trên, cần khiếm dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Ta có thể làm như sau:

Bước 1: Giải phương trình: $f(x) = 0$ hoặc $f(x) - g(x) = 0$ trên đoạn $[a; b]$. Giả sử tìm được 2 nghiệm c, d ($c < d$).

Bước 2: Sử dụng công thức phân đoạn:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^d |f(x)| dx + \int_d^b |f(x)| dx = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \left| \int_d^b f(x) dx \right|$$

(vì trên các đoạn $[a; c], [c; d], [d; b]$ hàm số $f(x)$ không đổi dấu)

b) Thể tích vật thể

- Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm các điểm a và b .

$S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Thể tích của B là:
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

- **Thể tích của khối tròn xoay:**

Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(C): $y = f(x)$, trục hoành, $x = a, x = b$ ($a < b$)

sinh ra khi quay quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

2. LUYỆN TẬP

Câu 1: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức:

A. $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

B. $S = \int_a^b f(x) dx.$

C. $S = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

D. $S = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

Câu 2: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f_1(x), y = f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức:

A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$

B. $S = \left| \int_a^b f_1(x) - f_2(x) dx \right|.$

C. $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$

D. $S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$

Câu 3: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 3$ là:

A. $\frac{28}{9} (dvdt).$

B. $\frac{28}{3} (dvdt).$

C. $\frac{1}{3} (dvdt).$

D. Tất cả đều sai.

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2$ có kết quả là:

A. $\frac{17}{4}.$

B. 4.

C. $\frac{15}{4}.$

D. $\frac{14}{4}.$

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = -x^2 + 5x + 6, y = 0, x = 0, x = 2$ có kết quả là:

A. $\frac{58}{3}.$

B. $\frac{56}{3}.$

C. $\frac{55}{3}.$

D. $\frac{52}{3}.$

Câu 6: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi parabol (P): $y = x^2 - 2x$, trục Ox và các đường thẳng $x = 1, x = 3$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

A. $\frac{2}{3}.$

B. $\frac{4}{3}.$

C. 2.

D. $\frac{8}{3}.$

Câu 7: Để tìm diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C): $y = x^3; y = 0; x = -1; x = 2$ một học sinh thực hiện theo các bước như sau:

Bước I. $S = \left| \int_{-1}^2 x^3 dx \right|$

Bước II. $S = \left| \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^2$

Bước III. $S = \left| 4 - \frac{1}{4} \right| = \frac{15}{4}$

Cách làm trên sai từ bước nào?

A. Bước I.

B. Bước II.

C. Bước III.

D. Không có bước nào sai.

Câu 8: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C): $y = 3x^4 - 4x^2 + 5; Ox; x = 1; x = 2$ là

A. $\frac{212}{15}.$

B. $\frac{213}{15}.$

C. $\frac{214}{15}.$

D. $\frac{43}{3}.$

Câu 9: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C): $y = -x^2 + 6x - 5; y = 0; x = 0; x = 1$ là

A. $\frac{5}{2}.$

B. $\frac{7}{3}.$

C. $-\frac{7}{3}.$

D. $-\frac{5}{2}.$

Câu 10: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C): $y = \sin x; Ox; x = 0; x = \pi$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

- Câu 11:** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{1}{e}, x = e$ là:
- A. $e + \frac{1}{e} (dvdv)$. B. $1 - \frac{1}{e} (dvdv)$. C. $e + \frac{1}{e} (dvdv)$. D. $2 - \frac{2}{e} (dvdv)$.
- Câu 12:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 4x; Ox; x = -3, x = 4$ bằng?
- A. $\frac{119}{4}$. B. 44. C. 36. D. $\frac{201}{4}$.
- Câu 13:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos x; Ox; Oy; x = \pi$ bằng?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. Kết quả khác.
- Câu 14:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 4x; Ox; x = -1$ bằng?
- A. 24. B. $\frac{9}{4}$. C. 1. D. $-\frac{9}{4}$.
- Câu 15:** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường $y = x^2 - x + 3$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ là
- A. $\frac{7}{6} (dvdv)$. B. $-\frac{1}{6} (dvdv)$. C. $\frac{1}{6} (dvdv)$. D. 5 (dvdv).
- Câu 16:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x, y = \sin^2 x + x (0 \leq x \leq \pi)$ có kết quả là
- A. π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. 2π . D. $\frac{\pi}{3}$.
- Câu 17:** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sin 2x, y = \cos x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ là
- A. $\frac{1}{4} (dvdv)$. B. $\frac{1}{6} (dvdv)$. C. $\frac{3}{2} (dvdv)$. D. $\frac{1}{2} (dvdv)$.
- Câu 18:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3\sqrt{x}; x = 4; Ox$ là
- A. $\frac{16}{3}$. B. 24. C. 72. D. 16.
- Câu 19:** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong (C): $y = x^3$, trục Ox và đường thẳng $x = \frac{3}{2}$. Diện tích của hình phẳng (H) là
- A. $\frac{65}{64}$. B. $\frac{81}{64}$. C. $\frac{81}{4}$. D. 4.
- Câu 20:** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong (C): $y = e^x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x = 2$. Diện tích của hình phẳng (H) là
- A. $e + 4$. B. $e^2 - e + 2$. C. $\frac{e^2}{2} + 3$. D. $e^2 - 1$.
- Câu 21:** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 3x, y = -x$ và đường thẳng $x = -2$ là:
- A. $-12 (dvdv)$. B. 12 (dvdv). C. 4 (dvdv). D. $-4 (dvdv)$.
- Câu 22:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x; y = 1$ và $x = 1$ là
- A. $e - 2$. B. e . C. $e + 1$. D. $1 - e$.
- Câu 23:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^4 - 4x^2; Ox$ bằng?
- A. 128. B. $\frac{1792}{15}$. C. $\frac{128}{15}$. D. $-\frac{128}{15}$.

- Câu 24:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - x$; Ox bằng?
 A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 2. D. $-\frac{1}{4}$.
- Câu 25:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$; Ox bằng?
 A. $\frac{32}{3}$. B. $\frac{16}{3}$. C. 12. D. $-\frac{32}{3}$.
- Câu 26:** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là:
 A. $\frac{8}{15} (dvdt)$. B. $\frac{7}{15} (dvdt)$. C. $-\frac{7}{15} (dvdt)$. D. $\frac{4}{15} (dvdt)$.
- Câu 27:** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và đường thẳng $x + y = 2$ là:
 A. $\frac{1}{6} (dvdt)$. B. $\frac{5}{2} (dvdt)$. C. $\frac{6}{5} (dvdt)$. D. $\frac{1}{2} (dvdt)$.
- Câu 28:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = -1, y = x^4 - 2x^2 - 1$ có kết quả là
 A. $\frac{6\sqrt{2}}{5}$. B. $\frac{28}{3}$. C. $\frac{16\sqrt{2}}{15}$. D. $\frac{27}{4}$.
- Câu 29:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = -x, y = 2x - x^2$ có kết quả là
 A. 4. B. $\frac{9}{2}$. C. 5. D. $\frac{7}{2}$.
- Câu 30:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x + 3, y = x^2 - 4x + 3$ có kết quả là:
 A. $\frac{5^2}{6}$. B. $\frac{5^3}{6}$. C. $\frac{5^4}{6}$. D. $\frac{5^3 - 1}{6}$.
- Câu 31:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2; y = x + 2$ bằng?
 A. $\frac{15}{2}$. B. $-\frac{9}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $-\frac{15}{2}$.
- Câu 32:** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = (e + 1)x, y = (1 + e^x)x$ là
 A. $\frac{e}{2} - 2 (dvdt)$. B. $\frac{e}{2} - 1 (dvdt)$. C. $\frac{e}{3} - 1 (dvdt)$. D. $\frac{e}{2} + 1 (dvdt)$.
- Câu 33:** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$ và $y = x$ là
 A. $\frac{9}{2} (dvdt)$ B. $\frac{7}{2} (dvdt)$ C. $-\frac{9}{2} (dvdt)$ D. 0 (dvdt).
- Câu 34:** Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục Ox , có công thức là:
 A. $V = \int_a^b f^2(x) dx$. B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. D. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$.
- Câu 35:** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và thỏa mãn: $0 < g(x) < f(x), \forall x \in [a; b]$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = f(x), y = g(x), x = a; x = b$. Khi đó V được tính bởi công thức nào sau đây?
 A. $\pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ B. $\pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$.
 C. $\left\{ \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right\}^2$. D. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

- Câu 36:** Thể tích khối tròn xoay sinh ra do quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$, trục Ox , $x = -1$, $x = 1$ một vòng quanh trục Ox là:
- A. π . B. 2π . C. $\frac{6\pi}{7}$. D. $\frac{2\pi}{7}$.
- Câu 37:** Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi đường $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$ là:
- A. $\frac{\pi^2}{4}$. B. $\frac{\pi^2}{2}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi^3}{3}$.
- Câu 38:** Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y = (1-x^2)$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$ khi quay quanh trục Ox bằng:
- A. $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$. B. 2π . C. $\frac{46\pi}{15}$. D. $\frac{5\pi}{2}$.
- Câu 39:** Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = 2$ quay quanh trục Ox có kết quả là:
- A. $2\pi(\ln 2 - 1)^2$. B. $2\pi(\ln 2 + 1)^2$. C. $\pi(2\ln 2 + 1)^2$. D. $\pi(2\ln 2 - 1)^2$.
- Câu 40:** Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2; x = 1$; trục hoành. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:
- A. $\frac{\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{2\pi}{5}$.
- Câu 41:** Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}; x = 4$; trục hoành. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:
- A. $\frac{15\pi}{2}$. B. $\frac{14\pi}{3}$. C. 8π . D. $\frac{16\pi}{3}$.
- Câu 42:** Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2; Ox$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng?
- A. $\frac{16}{15}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.
- Câu 43:** Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 3x - x^2; Ox$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:
- A. $\frac{81}{11}\pi$. B. $\frac{83}{11}\pi$. C. $\frac{83}{10}\pi$. D. $\frac{81}{10}\pi$.
- Câu 44:** Thể tích vật thể quay quanh trục Ox giới hạn bởi $y = x^3, y = 8, x = 3$ có kết quả là:
- A. $\frac{\pi}{7}(3^7 - 9 \cdot 2^5)$. B. $\frac{\pi}{7}(3^7 - 9 \cdot 2^6)$. C. $\frac{\pi}{7}(3^7 - 9 \cdot 2^7)$. D. $\frac{\pi}{7}(3^7 - 9 \cdot 2^8)$.
- Câu 45:** Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{4}{x}$ và $y = -x + 5$. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:
- A. $\frac{9\pi}{2}$. B. $\frac{15}{2} - 4\ln 4$. C. $\frac{33}{2} - 4\ln 4$. D. 9π .
- Câu 46:** Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = x + 1; y = \frac{6}{x}; x = 1; x > 0$. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:
- A. $\frac{13\pi}{6}$. B. $\frac{125\pi}{6}$. C. $\frac{35\pi}{3}$. D. 18π .

Câu 47: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = \sqrt{x}; d: y = \frac{1}{2}x$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

- A. 8π . B. $\frac{16\pi}{3}$. C. $\frac{8\pi}{3}$. D. $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 48: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = x^3; d: y = -x + 2; Ox$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

- A. $\frac{4\pi}{21}$. B. $\frac{10\pi}{21}$. C. $\frac{\pi}{7}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Câu 49: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng:

- A. $-\pi$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. π .

Câu 50: Thể tích khối tròn xoay khi cho Elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh trục Ox .

- A. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. B. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. C. $\frac{2}{3}\pi a^2 b$. D. $-\frac{2}{3}\pi ab^2$.