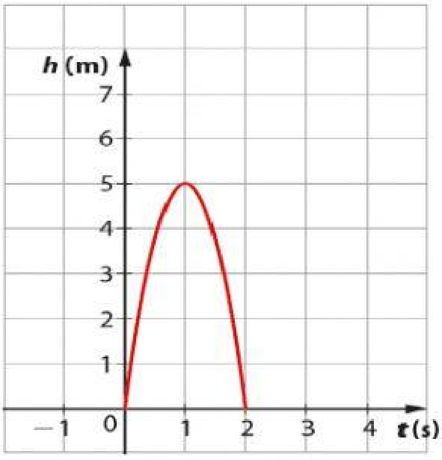
Crescimento e decrescimento da função quadrática

Vimos anteriormente quando uma função real de variável real é crescente em um intervalo e quando ela é decrescente. Estudaremos agora o comportamento da função quadrática em relação a crescimento e decrescimento.

Acompanhe a situação a seguir.

Em determinado momento de uma coreografia de ginástica rítmica, uma bola é lançada do solo verticalmente para cima. A altura *h* da bola em relação ao solo, em metro, varia de acordo com o tempo *t*, em segundo, de acordo com a lei $h(t) = -5t^2 + 10t$, considerando $0 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ s}$.

Observe o gráfico que representa a função *h*.

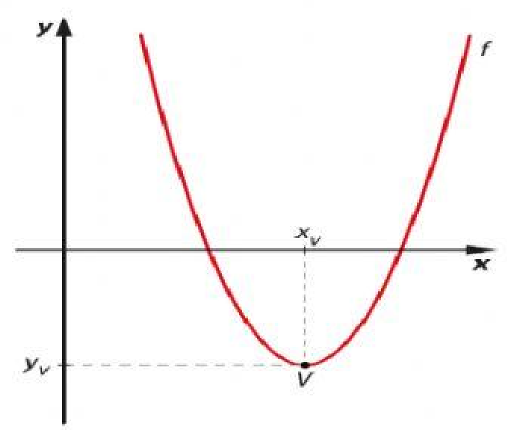
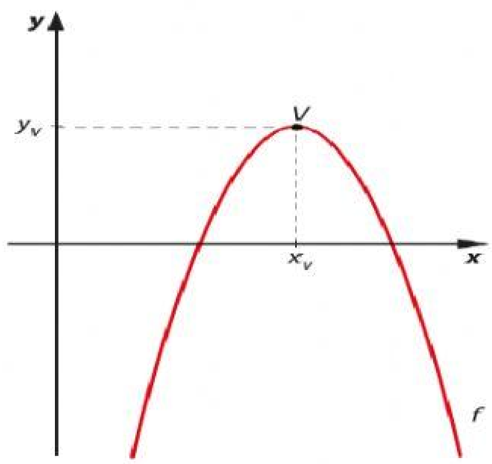


A função *h* é **crescente** no intervalo [0, 1], pois à medida que *t* aumenta nesse intervalo, $h(t)$ também aumenta. Em outras palavras, para quaisquer valores de t_1 e t_2 pertencentes a [0, 1], com $t_1 < t_2$, temos $h(t_1) < h(t_2)$.

Por outro lado, a função *h* é **decrescente** no intervalo [1, 2], pois à medida que *t* aumenta nesse intervalo, $h(t)$ diminui. Em outras palavras, para quaisquer valores de t_1 e t_2 pertencentes a [1, 2], com $t_1 < t_2$, temos $h(t_1) > h(t_2)$.

Considerando uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabemos que a parábola correspondente ao gráfico dessa função terá a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e que terá a concavidade voltada para baixo se $a < 0$.

De forma geral, podemos estudar o crescimento e o decrescimento da função quadrática com base no valor de *a* e na abscissa x_V do vértice da parábola como indicado a seguir.

$a > 0$	$a < 0$
	
• A função *f* é **decrescente** no intervalo $]-\infty, x_V]$. • A função *f* é **crescente** no intervalo $[x_V, +\infty[$.	• A função *f* é **crescente** no intervalo $]-\infty, x_V]$. • A função *f* é **decrescente** no intervalo $[x_V, +\infty[$.

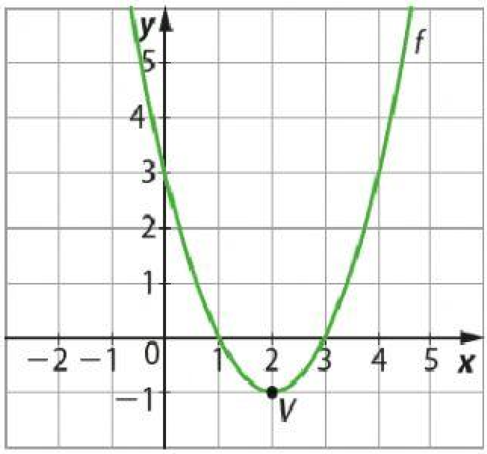
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considere, por exemplo, a função definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Calculando a abscissa x_V do vértice da parábola correspondente, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = 2$$

Assim, como $a > 0$, essa função é decrescente no intervalo $]-\infty, 2]$ e crescente no intervalo $[2, +\infty[$. O que pode também ser observado por meio do gráfico a seguir.

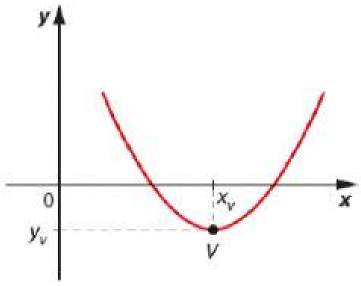


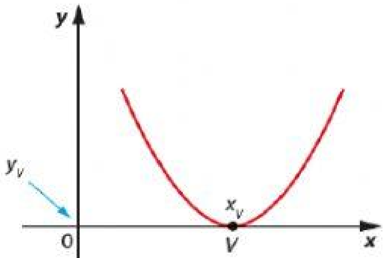
Valor mínimo e valor máximo da função quadrática

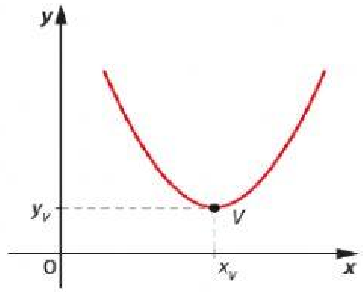
Ao esboçarmos o gráfico de uma função quadrática f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, consideramos o sinal do coeficiente a para identificar se a concavidade da parábola será voltada para cima ou voltada para baixo.

Utilizando esse esboço, podemos verificar, entre outras propriedades, que a função f tem um **valor mínimo** ou um **valor máximo**, que corresponde à **ordenada** do vértice da parábola.

Nesse caso, se $\boldsymbol{a > 0}$, a concavidade da parábola é voltada para cima e temos três situações possíveis para o gráfico:

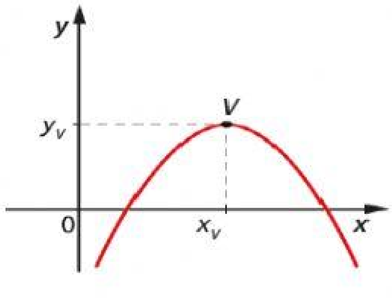


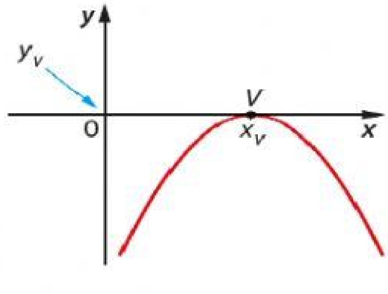


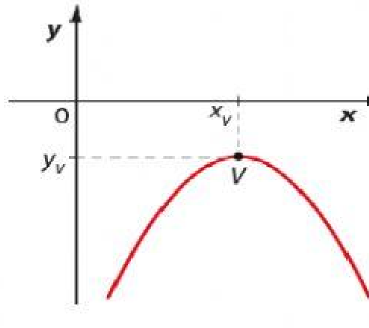


Observe que, nos três casos, o vértice V da parábola é o ponto cuja ordenada é o **menor valor** assumido pela função para todo $x \in D(f)$, chamado também de **ponto de mínimo** da função. A ordenada de V, que pode ser obtida por $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, é o **valor mínimo** da função, que ocorre quando $x_V = -\frac{b}{2a}$.

De maneira análoga, se $\boldsymbol{a < 0}$, a concavidade da parábola é voltada para baixo e temos outras três possibilidades para o gráfico da função:







ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

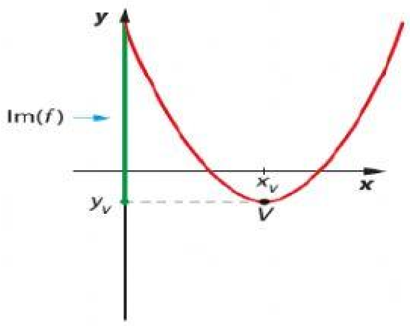
Considerando esses três casos, o vértice V da parábola é o ponto cuja ordenada é o **maior valor** assumido pela função para todo $x \in D(f)$, chamado também de **ponto de máximo** da função. A ordenada de V, que pode ser obtida por $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, é o **valor máximo** da função, que ocorre quando $x_V = -\frac{b}{2a}$.

Imagem da função quadrática

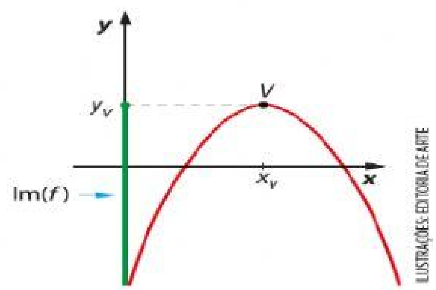
Utilizando as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática f, podemos determinar o seu **conjunto imagem**.

Vimos que quando $a > 0$, o vértice V é o ponto de mínimo da função e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor mínimo** que a função assume, ou seja, é o menor valor de imagem da função.

Por outro lado, quando $a < 0$, o vértice V é o ponto de máximo da função e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor máximo** que a função assume, ou seja, é o maior valor de imagem da função.



- Quando $a > 0$, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\}$.



- Quando $a < 0$, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

01. Uma empresa calculou que a produção mensal de x unidades de um certo produto gera um lucro mensal, em reais, de $150 - \frac{x}{4}$ por unidade do produto. Responda:

a) Qual é a lei da função que representa o lucro, em reais, em relação à quantidade de produtos produzidos por mês?

b) Qual é o lucro máximo mensal que essa empresa pode ter com a venda desse produto?

Resolução

a) Para obter a lei dessa função, multiplicamos a quantidade de produtos produzidos por mês pelo valor correspondente ao lucro unitário. Assim, temos:

$$L(x) = x \cdot \left(150 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow L(x) = 150x - \frac{x^2}{4}$$

A lei da função é $L(x) = 150x - \frac{x^2}{4}$.

b) O lucro máximo mensal é obtido pelo cálculo da ordenada do vértice do gráfico dessa função.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(150)^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-22500}{-1} = 22500$$

Assim, o lucro máximo mensal é de R$ 22.500,00.

02. Considere uma função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Em qual intervalo real essa função é crescente?

b) Determine o conjunto imagem dessa função.

Resolução

a) Como $a > 0$, a função f é crescente no intervalo $[x_V, +\infty[$.

Calculando a abscissa x_V do vértice da parábola, temos:

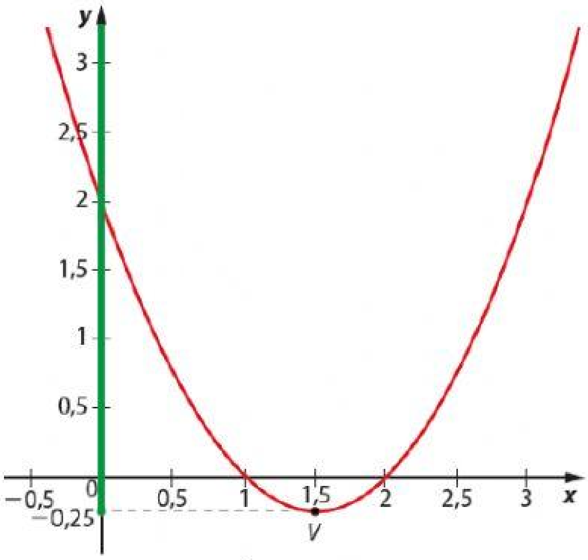
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Logo, a função f é crescente no intervalo $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

b) Para determinar o conjunto imagem da função f, determinamos inicialmente a ordenada y_V do vértice da parábola. Nesse caso, temos:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}{4} \Rightarrow y_V = -\frac{1}{4}$$

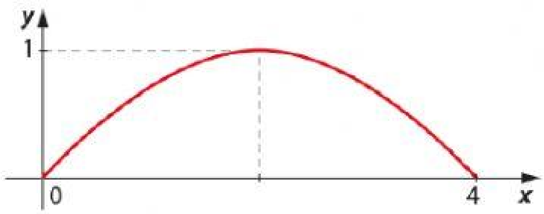
Como $a > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e y_V é o valor mínimo da função, como podemos verificar a seguir.



Assim, $f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{1}{4}\right\}$.

A figura a seguir mostra a trajetória aproximada do salto de uma rã representada pelo gráfico de uma função quadrática em um sistema cartesiano. O alcance do salto é de 4 metros e a altura máxima atingida é de 1 metro.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Com base nesses dados, determine:

a) as coordenadas do vértice da parábola;

b) a lei da função que modela a trajetória desse salto.

Resolução

a) Pelo enunciado, a altura máxima que a rã atinge é de 1 metro, ou seja, $y_V = 1$.
Além disso, esse gráfico cruza o eixo x nos pontos (0, 0) e (4, 0), pontos de partida e de chegada da rã ao solo respectivamente.
Como o vértice da parábola está no seu eixo de simetria, calculamos x_V fazendo a média aritmética das abscissas dos pontos (0, 0) e (4, 0).

$$x_V = \frac{4 + 0}{2} \Rightarrow x_V = 2$$

Logo, o vértice da parábola é $V(2, 1)$.

b) Como 0 e 4 são os zeros da função, podemos escrever a forma fatorada da lei correspondente:

$$y = a(x - 0)(x - 4) \Rightarrow y = ax^2 - 4ax$$

Como o ponto $V(2, 1)$ pertence ao gráfico da função, substituímos esses valores na expressão anterior e determinamos a.

$$1 = a \cdot 2^2 - 4 \cdot a \cdot 2 \Rightarrow 1 = 4a - 8a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

Portanto, a lei da função é $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$.

03. (EsPCEx-SP) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a

a) 4 lotes.
b) 5 lotes.
c) 6 lotes.
d) 7 lotes.
e) 8 lotes.

Resolução

Inicialmente, determinamos a expressão do lucro $L(x)$ dessa indústria em função do número de lotes x produzidos em um mês.

Do enunciado, temos $L(x) = V(x) - C(x)$. Assim:

$$L(x) = 3x^2 - 12x - (5x^2 - 40x - 40)$$
$$L(x) = 3x^2 - 12x - 5x^2 + 40x + 40$$
$$L(x) = -2x^2 + 28x + 40$$

O gráfico da função correspondente ao lucro é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$.

Portanto, o número de lotes mensais que devem ser produzidos para que a indústria obtenha lucro máximo é o valor da abscissa x_V do vértice.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{28}{2 \cdot (-2)} = \frac{-28}{-4} = 7$$

Logo, a resposta é a alternativa **d**.

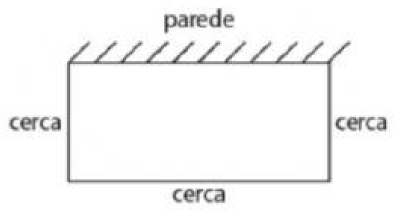
Exercícios

01. Determine o conjunto imagem das funções quadráticas definidas a seguir.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

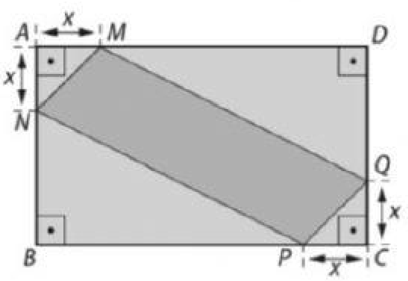
b) $g(x) = -2x^2 + 1$

02. Murilo comprou 40 metros de cerca para fazer um cercado em formato de retângulo para seu cachorro no quintal de sua moradia. Ele vai aproveitar uma parede como um lado do cercado de acordo com a figura a seguir.



Sabendo que ele vai utilizar toda a cerca comprada, qual é a área máxima que esse cercado poderá ter?

03. (UFJF-MG) Sobre os lados do retângulo *ABCD*, de dimensões 30 cm e 50 cm, marcam-se os pontos *M*, *N*, *P* e *Q* de forma que a distância dos pontos *M* e *N* ao vértice *A* e dos pontos *P* e *Q* ao vértice *C* sejam iguais a *x* centímetros. Veja a figura abaixo:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Determine o valor de *x* de modo que o quadrilátero *MNPQ* tenha área máxima.

04. (FGV-SP) Um vidraceiro tem um pedaço de espelho, na forma de um triângulo retângulo cujos lados medem 60 cm, 80 cm e 1 m, e quer recortar um espelho retangular cujo tamanho seja o maior possível. Para ganhar tempo, ele quer que dois dos lados do retângulo estejam sobre os lados do triângulo. Determine a medida dos lados do retângulo e a sua área.

05. (FEI-SP) Durante o processo de tratamento, uma peça de metal sofre uma variação de temperatura descrita pela função $f(t) = 2 + 4t - t^2, 0 < t < 5$. Em que instante t a temperatura atinge seu valor máximo?

06. Considere todos os possíveis retângulos que possuem perímetro igual a 80 cm. Dentre esses retângulos, determine aquele que tem área máxima. Qual é essa área?

07. (Fuvest-SP) A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo?

a) R$ 2.000,00.

b) R$ 3.200,00.

c) R$ 3.600,00.

d) R$ 4.000,00.

e) R$ 4.800,00.

08. (UEMG) Suponha que numa fábrica de barras de chocolate o custo total da produção, em reais, é dado por $C(x) = x^2 - 20x + 600$, em que x é a quantidade de barras produzidas. Nesse caso, é **CORRETO** afirmar que:

a) a produção de 10 barras é a que proporciona o custo mínimo da produção.

b) quando são produzidas 20 barras, o custo total da produção é de R$ 400,00.

c) o custo máximo da produção é de R$ 600,00.

d) o custo mínimo da produção é de R$ 650,00.

09. (UEG-GO) O lucro de uma empresa é dado pela relação $R = L + C$, em que L é o lucro, R é a receita e C é o custo de produção. Numa empresa que produziu x unidades de um produto, verificou-se que $C(x) = 2x^2 + 2\,500x + 3\,000$ e $R(x) = x^2 + 7\,500x + 3000$.

a) Esboce o gráfico da função L.

b) Quantas unidades essa empresa deve produzir para obter o maior lucro possível?