- **Matemática Financeira**

Sistemas de amortização

Quando adquirimos um bem de maior valor, como um automóvel ou um imóvel, é comum fazer um empréstimo ou financiamento por meio de uma instituição financeira. O valor negociado nesse tipo de transação é chamado **capital**, e deve ser restituído à instituição financeira acrescido de **juro**.

Uma vez contratado o financiamento, o processo para saldar a dívida se dá por meio de pagamentos periódicos conhecidos como **parcelas**, ou **prestações**, que são pagas em intervalos de tempo constantes, normalmente mensais. Alguns financiamentos também incluem o pagamento de quantias preestabelecidas e que são feitas em datas combinadas previamente.

Em um empréstimo ou financiamento, o valor de cada prestação é composto de uma parte do capital adquirido e do juro calculado sobre o saldo devedor. Essa parte do capital adquirido é também chamada de **amortização** ou **valor amortizado**.

Assim, considerando P o valor da prestação, A o valor amortizado e J o juro sobre o saldo devedor, podemos escrever:

$$P = A + J$$

As diferentes maneiras de se realizar esse cálculo caracterizam o que chamamos de **sistema de amortização**. Alguns dos sistemas mais utilizados são: Sistema Price ou Francês, Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Misto (SAM), entre outros.

Vamos estudar o Sistema Price e o Sistema de Amortização Constante, que costumam ser os mais praticados no mercado consumidor.

Sistema Price

O Sistema Price, ou Sistema de Amortização Francês, é aquele que prevê o pagamento em **prestações iguais**, de valor fixo, durante todo o período de quitação do valor emprestado ou financiado. Normalmente é mais utilizado em contratos de curto prazo, como na compra de automóveis.

Acompanhe a situação a seguir.

Aline vai comprar um carro no valor de R$ 39.500,00 e pretende pagar R$ 7.500,00 como valor de entrada e financiar o restante da dívida em 36 prestações.

Ela conseguiu uma proposta de financiamento em um banco, a uma taxa de 2,5% ao mês, considerando o Sistema Price de amortização. O gerente enviou a ela uma planilha com algumas informações sobre as prestações. Observe as primeiras linhas dessa planilha.

Mês	Prestação	Amortização	Juros	Saldo devedor
0				R$ 32.000,00
1	R$ 1.358,45	R$ 558,45	R$ 800,00	R$ 31.441,55
2	R$ 1.358,45	R$ 572,41	R$ 786,04	R$ 30.869,14
3	R$ 1.358,45	R$ 586,72	R$ 771,73	R$ 30.282,42

- Conhecer o valor a ser pago todo mês e o fato de a primeira parcela não ser tão alta quando comparada a outros sistemas de amortização influenciam as pessoas a optar por esse sistema.

LIVEWORKSHEETS

Acompanhe uma situação em que deduzimos o valor da prestação P no sistema Price, considerando um valor V, financiado a uma taxa de juro i, que será pago em 3 prestações.

Ao fim do primeiro mês, deve-se à instituição financiadora: $V \cdot (1 + i)$; e paga-se P. Assim, o saldo devedor é:

$$V(1 + i) - P$$

Ao fim do segundo mês, deve-se à instituição financiadora $[V(1 + i) - P] \cdot (1 + i)$ e paga-se P. Assim, o saldo devedor é:

$$[V(1 + i) - P] \cdot (1 + i) - P = V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P$$

Ao fim do terceiro mês, deve-se à instituição financiadora $[V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P] \cdot (1 + i)$ e paga-se P. Assim, o saldo devedor é:

$$[V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P] \cdot (1 + i) - P = V(1 + i)^3 - (1 + i)^2P - (1 + i)P - P$$

Como a terceira prestação é a última, o saldo devedor ao fim do terceiro mês é igual a zero. Logo, $V(1 + i)^3 - (1 + i)^2P - (1 + i)P - P = 0$.

Isolando o valor de P, obtemos: $P = \dfrac{V(1+i)^3}{(1+i)^2+(1+i)+1}$

Substituindo $(1 + i)^2 + (1 + i) + 1$ por $\dfrac{(1+i)^3-1}{(1+i)-1}$, temos: $P = \dfrac{V(1+i)^3}{\dfrac{(1+i)^3-1}{(1+i)-1}} = \dfrac{V(1+i)^3 \cdot i}{(1+i)^3-1}$

Generalizando esse resultado, apresentamos a seguir uma forma de calcular o valor da prestação nesse sistema de amortização.

O valor P da prestação no Sistema Price pode ser calculado utilizando-se a expressão $P = V \cdot \dfrac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$, em que V é o valor financiado, i a taxa de juro ao mês e n a quantidade de prestações a serem quitadas.

Atualmente os *softwares* de planilhas eletrônicas apresentam funções que permitem criar uma tabela com os valores envolvidos em todo o financiamento, que é também conhecida como **Tabela Price**.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Assim como o nome sugere, o Sistema de Amortização Constante (SAC) é aquele no qual a amortização A é constante, caracterizando um sistema mais agressivo de amortização, quando comparado ao Price. Com isso, as parcelas iniciais costumam ser mais altas.

Nesse sistema, a amortização de uma dívida é calculada pela razão entre o capital C contratado e a quantidade n de parcelas, indicada por:

$$A = \frac{C}{n}$$

Normalmente esse sistema é mais utilizado em contratos de longo prazo, envolvendo quantias muito grandes, como na compra de imóveis.

LIVEWORKSHEETS

Acompanhe a situação a seguir.

Pedro e Amanda são sócios em uma loja de móveis e aproveitaram uma oportunidade para investir em um imóvel onde a loja funciona atualmente, que é um local alugado. Para isso, precisaram fazer um empréstimo de R$ 70.000,00, a juros de 7,8% ao ano, pelo SAC.

- Situações envolvendo empréstimos requerem cuidado e planejamento, não apenas considerando taxas de juro, mas também os sistemas de amortização.

Quando analisaram as possibilidades e a proposta da instituição financeira, optaram por um período de 10 anos de financiamento.

Como a amortização é um valor fixo que compõe parte do valor de cada prestação, o saldo devedor diminuirá a cada mês, de acordo com o pagamento das parcelas. Consequentemente, o valor do juro que será calculado sobre o saldo devedor também diminuirá, fazendo o valor da próxima parcela ser inferior ao valor da parcela anterior.

Nesse caso, o valor amortizado em cada prestação é R$ 583,33:

$$\text{R\$ } 70.000{,}00 : 120 = \text{R\$ } 583{,}33.$$

O valor de juro pago na primeira parcela é calculado sobre o saldo devedor, que corresponde a todo o valor emprestado. Nesse caso, como a taxa é de 7,8% ao ano, isso equivale a 0,65% ao mês. Assim temos:

$$J = 0{,}0065 \cdot \text{R\$ } 70.000{,}00 = \text{R\$ } 455{,}00$$

A primeira prestação é obtida adicionando a amortização e o juro correspondentes:

$$P_1 = \text{R\$ } 583{,}33 + \text{R\$ } 455{,}00 = \text{R\$ } 1.038{,}33$$

A segunda prestação é obtida adicionando a amortização (R$ 583,33) com o juro correspondente, que é calculado sobre o saldo devedor (R$ 69.416,67), ou seja, 69 416,67 · 0,0065 = 451,21. Assim:

$$P_2 = \text{R\$ } 583{,}33 + \text{R\$ } 451{,}21 = \text{R\$ } 1.034{,}54$$

O saldo devedor, para o cálculo de P_3 é:

$$\text{R\$ } 69.416{,}67 - \text{R\$ } 583{,}33 = \text{R\$ } 68.833{,}34.$$

Observe como podemos organizar esses valores em uma planilha e calcular os valores das cinco primeiras prestações.

Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R$ 70.000,00			
1	R$ 69.416,67	R$ 583,33	R$ 455,00	R$ 1.038,33
2	R$ 68.833,34	R$ 583,33	R$ 451,21	R$ 1.034,54
3	R$ 68.250,01	R$ 583,33	R$ 447,42	R$ 1.030,75
4	R$ 67.666,68	R$ 583,33	R$ 443,62	R$ 1.026,95
5	R$ 67.083,35	R$ 583,33	R$ 439,83	R$ 1.023,16

LIVEWORKSHEETS

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Marília vai fazer um empréstimo de R$ 50.000,00 para uma reforma em seu estúdio de fotografia e está analisando qual sistema de amortização vai utilizar, de acordo com as propostas de uma agência financiadora, que trabalha com uma taxa de 0,95% ao mês. Ela pretende saldar a dívida em 6 anos.

a) Qual será o valor amortizado em cada parcela se Marília decidir pelo SAC? De quanto será a primeira prestação nesse caso?

b) Se decidir pelo Sistema Price, qual será o valor de cada prestação? Qual será o valor amortizado na primeira prestação?

Resolução

a) Como no SAC o valor amortizado é constante em todo o período de quitação, dividimos o capital pela quantidade de prestações. Assim, temos:

$$A = \frac{50000}{72} = 694{,}4444...$$

Utilizando duas casas decimais, por se tratar de valor monetário, arredondamos para 694,44. Assim, o valor amortizado em cada parcela será de R$ 694,44.

O juro pago na primeira prestação é calculado considerando todo o capital emprestado, pois ainda não houve amortização. Nesse caso, temos:

$$J = 0{,}0095 \cdot \text{R\$ } 50.000{,}00 = \text{R\$ } 475{,}00$$

Logo, P_1 = R$ 694,44 + R$ 475,00 = R$ 1.169,44.

No SAC, a primeira prestação será de R$ 1.169,44.

b) No Sistema Price, o valor da prestação é constante em todo o período de quitação, e pode ser obtido por meio da expressão:

$$P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

Substituindo V por 50 000, i por 0,0095 e n por 72, e utilizando uma calculadora científica, obtemos o valor de P.

$$P = 50\,000 \cdot \frac{(1+0{,}0095)^{72} \cdot 0{,}0095}{(1+0{,}0095)^{72} - 1} \simeq 961{,}979186$$

Utilizando duas casas decimais, por se tratar de valor monetário, como a terceira casa decimal é maior do que 5, arredondamos para 961,98. Assim, o valor de cada prestação será de R$ 961,98 no sistema Price.

Como no SAC, o juro pago na primeira prestação é calculado sobre todo o valor tomado como empréstimo. Recuperando o valor calculado no item **a**, temos J = R$ 475,00.

Logo, A = R$ 961,98 − R$ 475,00 = R$ 486,98.

Portanto, o valor amortizado na primeira prestação é R$ 486,98.

LIVEWORKSHEETS

2. Construa uma planilha eletrônica simulando os valores das prestações de amortização e dos juros cobrados pela agência financiadora da atividade anterior para auxiliar Marília a analisar a situação proposta.

Resolução

Vamos utilizar o **Calc**, que faz parte do **LibreOffice**, para construir a planilha. Ele é um *software* de uso gratuito que pode ser baixado em <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/> (acesso em: 15 jul. 2020). Inicialmente, vamos construir uma tabela considerando o Sistema Price, utilizando o passo a passo a seguir.

I. Depois de entrar no **Calc**, preparamos o local onde entrarão as variáveis (valor emprestado, taxa de juro e número de meses) e digitamos o título de cada coluna, como na imagem.

	A	B	C	D	E
1	Valor emprestado				
2	Taxa				
3	Número de meses				
4					
5	Mês	Prestação	Amortização	Juro	Saldo devedor
6					

FOTOS: LIBREOFFICE

II. Com o botão formatamos as células que terão valores monetários. Também formatamos a célula que vai receber a taxa, clicando em %, para indicar a porcentagem, e em ,00 duas vezes, para considerar duas casas decimais.

III. Na primeira célula das colunas **Mês**, **Prestação**, **Amortização** e **Juro**, digitamos "0" (zero). Na primeira célula da coluna **Saldo devedor**, digitamos "=$B$1" e pressionamos ***Enter*** (o $ serve para deixar fixa a célula indicada). Essa linha corresponde ao início do contrato.

Outra possibilidade de fixar a célula **B1** é pressionar a tecla **F4** depois de digitar "B1".

	A	B	C	D	E
1	Valor emprestado	R$ 50.000,00			
2	Taxa	0,95%			
3	Número de meses	72			
4					
5	Mês	Prestação	Amortização	Juro	Saldo devedor
6	0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 50.000,00
7					

IV. Na célula **A7**, digitamos "=A6+1" e teclamos ***Enter***, para indicar o mês 1, ou seja, a primeira prestação.

V. Em **B7**, vamos usar a função **PGTO** do **Calc**. Digitamos "=PGTO($B$2;$B$3;-$B$1)" e pressionamos ***Enter***. Atenção: precisamos digitar o sinal de menos antes de "$B$1".

VI. Na célula **C7**, digitamos "=B7-D7" e ***Enter***, mas alertamos que o resultado ainda não está correto. É necessário calcular o juro e, para isso, digitamos, na célula **D7**, "=$B$2*E6" e pressionamos ***Enter***.

VII. Por fim, na célula **E7**, digitamos "=E6-C7" e pressionamos ***Enter***. Para obter as próximas linhas, selecionamos todas as células da linha que começa em 1, posicionamos o cursor por meio do *mouse* no ponto inferior direito da última célula, clicamos e arrastamos para baixo, até obter a linha do mês 72.

LIVEWORKSHEETS

Vamos construir agora uma tabela considerando o SAC, utilizando o passo a passo a seguir.

I. Vamos construir à direita da primeira tabela, utilizando as colunas **G** a **K** do **Calc**. Preparamos o local onde entrarão as variáveis (**Valor emprestado**, **Taxa de juro** e **Número de meses**) e digitamos o título de cada coluna, como na imagem.

Valor emprestado				
Taxa				
Número de meses				
Mês	Saldo devedor	Amortização	Juro	Prestação

Observe que invertemos a ordem das colunas, apenas por uma questão de organização.

II. Repetimos o passo **II** da construção anterior para formatar as células.

III. Na primeira célula das colunas **Mês**, **Amortização**, **Juro** e **Prestação**, digitamos "0" (zero). Na primeira célula da coluna **Saldo devedor**, digitamos "=$H$1" e pressionamos ***Enter***. Essa linha corresponde ao início do contrato.

Valor emprestado	R$ 50.000,00			
Taxa	0,95%			
Número de meses	72			
Mês	Saldo devedor	Amortização	Juro	Prestação
0	R$ 50.000,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00

FOTOS: LIBREOFFICE

IV. Na célula **G7**, digitamos "=G6+1" e teclamos ***Enter*** para indicar o mês 1, ou seja, a primeira prestação.

V. Em **I7**, vamos calcular a amortização, que é constante nesse sistema, digitando "=$H$1/$H$3" e pressionando ***Enter***. Voltamos na célula **H7** e digitamos "=H6-I7", pressionando ***Enter*** na sequência, para obter o **Saldo devedor** depois de realizado o pagamento da primeira prestação.

VI. Para calcular o juro, digitamos, na célula **J7**, "=$H$2*H6" e pressionamos ***Enter***.

VII. Por fim, na célula **K7**, digitamos "=I7+J7" e pressionamos ***Enter***, para obter o valor da primeira prestação. Para obter as próximas linhas, selecionamos as células dessa tabela partindo da linha que começa em 1, posicionamos o cursor por meio do *mouse* no ponto inferior direito da última célula, clicamos e arrastamos para baixo, até obter a linha do mês 72.

LIVEWORKSHEETS

Exercícios

1. Responda às questões a seguir, com base em alguns resultados das atividades resolvidas na seção anterior.

a) Em qual dos sistemas de amortização a primeira prestação é mais alta? Em sua opinião isso pode influenciar a decisão de Marília?

b) Comparando os valores amortizados nas primeiras prestações, o que você percebe? Esse fato interfere no montante de juro pago em todo o período de quitação da dívida?

2. Em cada situação a seguir, considerando o SAC, calcule o valor amortizado a cada prestação.

a) Em um empréstimo de R$ 25.000,00 que deve ser pago em 8 prestações.

b) Em um financiamento de R$ 40.000,00 que deve ser pago em 10 prestações, porém considerando uma entrada de R$ 12.000,00.

3. Um veículo no valor de R$ 75.000,00 está à venda de acordo com as seguintes condições.

Entrada de 25% do valor;
O restante em 48 prestações com juros de 2% a.m.

De acordo com essas informações, responda.

a) Qual é o valor a ser financiado?

b) Se o financiamento for feito sob o Sistema Price de amortização, qual será o valor da prestação?

c) Caso a opção seja pelo financiamento segundo o SAC, qual será o valor amortizado em cada prestação?

d) Utilizando uma planilha eletrônica para simular os valores do financiamento no Sistema Price e no SAC, qual será o montante de juro pago em todo o período?

4. Sandro vai comprar uma geladeira e se interessou pelo modelo seguinte.

Sabendo que a loja trabalha com o Sistema Price de amortização, se Sandro comprar essa geladeira deverá pagar 10 prestações de:

a) R$ 176,80.

b) R$ 206,80.

c) R$ 209,59.

d) R$ 229,59.

e) R$ 249,49.



AMAPHOTO/SHUTTERSTOCK.COM; THAMPAPON/SHUTTERSTOCK.COM

- Antes de comprar um produto à prazo é importante negociar as condições de pagamento de modo a não pagar juros ou reduzir o quanto possível essa taxa.

LIVEWORKSHEETS