Kesamaan Dua Matriks

Matriks A dan matriks B dikatakan sama (A = B) jika dan hanya jika:

a. Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

ii. Setiap entri yang seletak pada matriks A dan matriks B mempunyai nilai yang sama, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Contoh :

a. $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 8 & 2^2 & 5-3 \\ 4 & 5 & \sqrt{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Perhatikan contoh a dan b. Jika dilihat kedua matriks pada contoh a memiliki elemen seletak yang sama dan memiliki ordo yang sama yaitu 2, maka dua matriks tersebut sama. Namun untuk contoh b apakah kedua matriks tersebut sama? Ya, kedua matriks tersebut memilki ordo 2x3 dan setiap elemen seletak bernilai sama, dengan $2^2 = 4$, $5-3=2$, $\sqrt{9}=3$.

Berikan pendapatmu mengenai matriks berikut. Apakah keduanya merupakan matriks yang sama? Jelaskan alasanmu!

$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2^5 & -2 & 1 \\ 3 & 0^2 & 5+7 \end{bmatrix}$

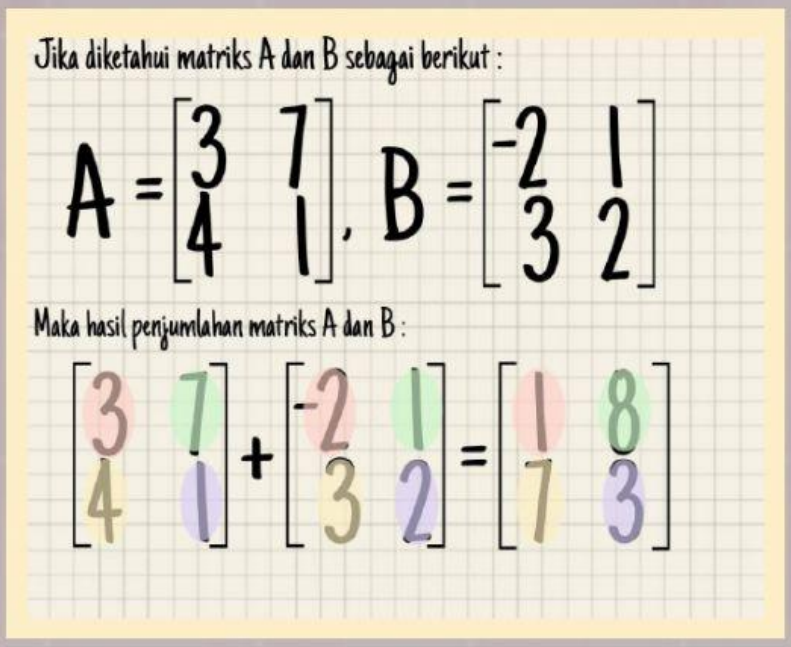
LIVEWORKSHEETS

Operasi Pada Matriks

1. **Penjumlahan**

   Dua matriks dapat dijumlahkan hanya jika memiliki ordo yang sama dan ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks adalah sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan. Caranya yaitu dengan menjumlahkan elemen seletak

   Contoh :

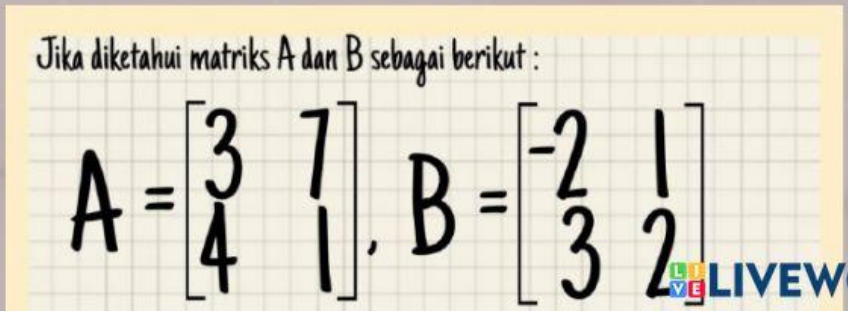


   Dapat kalian lihat, elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1 matriks A dijumlahkan dengan sesama baris ke-1 dan kolom ke-1 matriks B. Dimana hasilnya juga terletak pada baris ke-1 dan kolom ke-1. Begitu pula untuk menjumlahkan baris dan kolom lain (Perhatikan tanda berwarna merah, ijau, kuning dan biru).

2. **Pengurangan**

   Dua matriks dapat dikurangi hanya jika memiliki ordo yang sama dan ordo matriks hasil pengurangan dua matriks adalah sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan. Caranya yaitu dengan mengurangi elemen seletak

   Contoh :



LIVEWORKSHEETS

Maka hasil pengurangan matriks A dan B :

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sama seperti operasi penjumlahan, pada operasi pengurangan elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1 matriks A dikurangi dengan sesama baris ke-1 dan kolom ke-1 matriks B. Dimana hasilnya juga terletak pada baris ke-1 dan kolom ke-1 dan begitu pula seterusnya.

3. Perkalian skalar

   Jika A sebuah matriks dan k bilangan real maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen matriks A dengan k.

   Contoh :

$$\text{Jika } L = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } 2L = \begin{bmatrix} 2\times8 & 2\times7 & 2\times3 \\ 2\times2 & 2\times-5 & 2\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 14 & 6 \\ 4 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

   Pada contoh diatas bilangan skalarnya adalah 2, sehingga hasil kali skalar dengan matriks menjadi 2L, dimana setiap elemen pada matriks L dikalikan dengan bilangan skalar, yaitu 2.

4. Perkalian dua matriks

   Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Hasil kalinya adalah jumlah dari

LIVEWORKSHEETS

hasil kali elemen-elemen pada baris matriks A dengan elemen-elemen pada kolom matriks B.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -9 & 10 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Coba kalian perhatikan matriks A,B dan C diatas. Apakah semuanya dapat dikalikan dengan satu sama lain? Matriks A dan B dapat dikalikan karena banyaknya baris pada matriks A sama dengan banyaknya kolom pada matriks B yaitu 2. Begitu pula untuk matriks B dan C, karena banyaknya baris pada matriks B sama dengan banyaknya kolom pada matriks C yaitu 2.

Namun, apakah matriks A dan C dapat dikalikan? Coba tulis pendapatmu dibawah ini

Jika A dan B matriks persegi ber-ordo 2, maka berkalian matriks A dan matriks B:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{bmatrix}$$

Contoh :

Diketahui matriks D dan G :

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Maka $D \times G = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

LIVEWORKSHEETS

$$= \begin{bmatrix} 3.5+2.3+1.(-2) & 3.1+2.2+1.3 & 3.7+2.1+1.5 \\ (-1).5+4.3+5.(-2) & (-1).1+4.2+5.3 & (-1).7+4.1+5.5 \\ 3.5+6.3+0.(-2) & 3.1+6.2+0.3 & 3.7+6.1+0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15+6-2 & 3+4+3 & 21+2+5 \\ -5+12-10 & -1+8+15 & -7+4+25 \\ 15+18+0 & 3+12+0 & 21+6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 10 & 28 \\ -3 & 22 & 22 \\ 36 & 15 & 27 \end{bmatrix}$$

Agar lebih memahami materi diatas, kalian dapat menyimak video berikut :

Sumber : https://youtu.be/D4hUaLB3gAY

Jika sudah paham, cobalah untuk mencoba soal berikut :

$$3 \times \left(\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

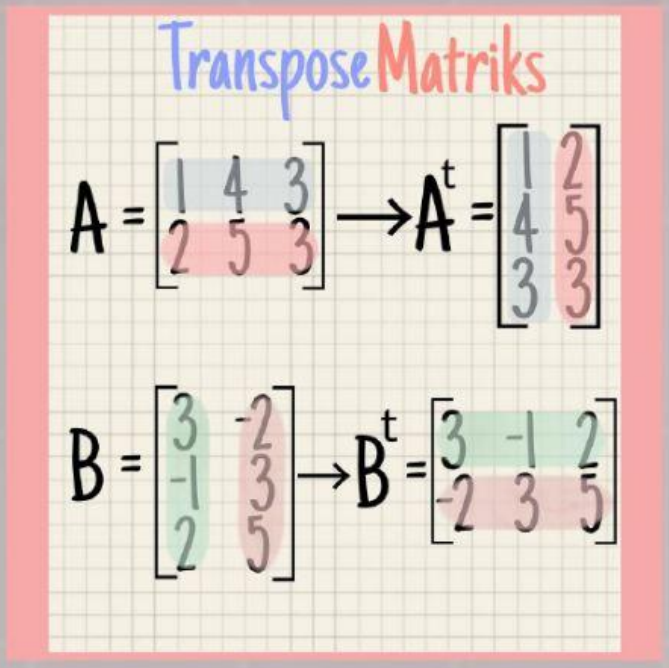
Hasilnya adalah $= \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$

LIVEWORKSHEETS

Transpose Matriks

Transpose matriks adalah suatu matriks yang diperoleh dari hasil pertukaran antara elemen baris dan kolomnya. Jadi, elemen-elemen pada baris ditukar menjadi elemen-elemen pada kolom, atau sebaliknya. Misalnya, kita akan mentranspose matriks A dan B. Maka, matriks transposenya dapat dinotasikan dengan A^t dan B^t.

Contoh :



Coba kamu perhatikan matriks A dan A^t! Elemen-elemen kolom ke-1 matriks A^t (tanda biru), merupakan pertukaran dari elemen-elemen baris ke-1 matriks A. Begitu juga dengan elemen-elemen kolom ke-2 matriks A^t (tanda merah), merupakan pertukaran dari elemen-elemen baris ke-2 matriks A. Begitu pula untuk matriks B dan B^t.

Dari pembahasan contoh di atas, dapat kita pahami transpose matriks mengalami perubahan ordo matriks. Misal, jika matriks awal berordo m×n, maka setelah dilakukan transpose matriks menjadi berordo n×m. Seperti matriks A ber-ordo 2x3, setelah di transpose ordo matriks menjadi 3x2.

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

[0 1 7 3] [3 4 5 -2]

[5 7] [4 1]

Baris kedua dari transpose matriks diatas adalah...

LIVEWORKSHEETS

Determinan dan Invers Matriks

1. **Determinan matriks**

   Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur-unsur suatu matriks persegi. Sehingga jika jumlah baris dan kolomnya tidak sama, maka tidak bisa dicari determinannya.

   Misalnya, terdapat suatu matriks yang kita beri nama matriks A. Determinan matriks A dapat dinotasikan dengan det (A), det A, atau |A|.

   Untuk matriks ber-ordo 2, maka cara menghitungnya :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

   Untuk matriks ber-ordo 3, maka digunakan kaidah sarrus :

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{array}{c} \overset{+}{a}\ \overset{+}{b}\ \overset{+}{c} \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ \underset{-}{g}\ \underset{-}{h}\ \underset{-}{i} \end{array} \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

LIVEWORKSHEETS

Contoh :

Determinan dari matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **adalah**

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$$= (1.0.1) + (3.2.3) + (2.-1.5) - (3.0.2) - (5.2.1) - (1.-1.2)$$
$$= 0 + 18 - 10 - 0 - 10 + 2$$
$$= 0$$

Jika nilai determinan matriks adalah nol, maka matriks tersebut adalah matriks singular

2. Invers matriks

Invers matriks adalah kebalikan (invers) dari sebuah matriks yang apabila matriks tersebut dikalikan dengan inversnya, akan menjadi matriks identitas. Invers matriks dilambangkan dengan A^{-1}.

Syarat matriks yang memiliki invers :

- **Determinan dari matriks tersebut tidak sama dengan nol**
- **Matriks berbentuk matriks persegi**

Untuk invers matriks ber-ordo 2 maka menggunakan rumus :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{Adj } A$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh : Invers dari matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **adalah...**

$$C^{-1} = -\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

LIVEWORKSHEETS

Untuk lebih jelasnya kalian dapat menyimak video berikut

Sumber : https://youtu.be/X_G7ydrDp9M

LIVEWORKSHEETS