

Ulfa Ni'matil Hasanah

**LKPD**

**LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK**  
Berbasis Penemuan Terbimbing

# MATEMATIKA

Untuk SMA/MA  
Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam

Kelas XI  
Semester 1



## TRIGONOMETRI

**Rumus Perkalian dan Penjumlahan**  
**Bentuk Trigonometri**

# 2

## JUMLAH dan SELISIH SINUS dan KOSINUS

Mata Pelajaran : Matematika

Kelas : XI

Semester : 1

| Kompetensi Inti 1 (Sikap Spiritual)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Kompetensi Inti 2 (Sikap Sosial)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan proaktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia. |
| Kompetensi Inti 3 (Pengetahuan)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Kompetensi Inti 4 (Keterampilan)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 3. Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah. | 4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif, serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.                                                                                                                                    |

| Kompetensi Dasar                                               | Kompetensi Dasar                                                                           |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.2 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus | 4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan kosinus |

| Indikator Pencapaian Kompetensi                                     | Indikator Pencapaian Kompetensi                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.2.3 Menemukan rumus perkalian dan penjumlahan bentuk trigonometri | 4.2.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus perkalian dan penjumlahan bentuk trigonometri. |

## C Rumus Perkalian dan penjumlahan Bentuk Trigonometri

Tujuan Pembelajaran:

Dengan menggunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut, peserta didik dapat menemukan rumus perkalian dan penjumlahan bentuk trigonometri.

### Apersepsi

Mobil ambulan yang melaju di jalan raya membunyikan sirine dengan gelombang bunyi sebesar

$$y = A_o \sin 2\pi f_1 t,$$

tepat di depan mobil tersebut, ada mobil polisi yang membunyikan sirine dengan gelombang bunyi

$$y = A_o \sin 2\pi f_2 t.$$

Bunyi sirine yang didengar setiap orang di jalan raya tersebut semakin kuat karena terjadi interferensi gelombang. Bentuk interferensi gelombang bunyi kedua sirine tersebut :

$$y = A_o \sin 2\pi f_1 t + A_o \sin 2\pi f_2 t$$

$$\Leftrightarrow y = A_o \sin 2\pi f_1 t + A_o \sin 2\pi f_2 t$$

$$\Leftrightarrow y = A_o (\sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t)$$

Misalkan  $2\pi f_1 t = a$  dan  $2\pi f_2 t = b$

$$\Leftrightarrow y = A_o (\sin a + \sin b)$$



Bentuk  $\sin a + \sin b$  merupakan bentuk penjumlahan sinus. Pada subbab ini kita akan belajar tentang rumus penjumlahan bentuk trigonometri, namun sebelumnya kita harus mempelajari dahulu rumus perkalian bentuk trigonometri

## MARI BERPIKIR

Dari pembelajaran rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut,  $\sin (a + b)$  dan  $\sin (a - b)$  apabila dijumlahkan akan diperoleh:

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin (a + b) + \sin (a - b) = \sin a \cos b + \sin a \cos b$$

$$\sin (a + b) + \sin (a - b) = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)] = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\Leftrightarrow \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)]$$

$\sin (a + b)$  dan  $\sin (a - b)$  apabila dikurangkan akan diperoleh:

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin (a + b) - \sin (a - b) = \cos a \sin b + \cos a \sin b$$

$$\sin (a + b) - \sin (a - b) = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\sin (a + b) - \sin (a - b)] = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\Leftrightarrow \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) - \sin (a - b)]$$

$\cos (a + b)$  dan  $\cos (a - b)$  apabila dijumlahkan akan diperoleh:

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = \cos a \cos b + \cos a \cos b$$

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)] = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\Leftrightarrow \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$$

$\cos (a + b)$  dan  $\cos (a - b)$  apabila dikurangkan akan diperoleh:

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos (a + b) - \cos (a - b) = -\sin a \sin b - \sin a \sin b$$

$$\cos (a + b) - \cos (a - b) = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} [\cos (a + b) - \cos (a - b)] = \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\Leftrightarrow \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos (a + b) - \cos (a - b)]$$

Dari rumus  $\sin a \sin b$  dan  $\cos a \cos b$  dapat diperoleh:

$$\tan a \tan b = \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{\boxed{\phantom{000000}}}$$

$$\tan a \tan b = \frac{-\frac{1}{2} [\cos (a + b) - \cos (a - b)]}{\frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]}$$

$$\tan a \tan b = -\frac{\cos (a + b) - \cos (a - b)}{\cos (a + b) + \cos (a - b)}$$

## Rumus Perkalian Bentuk Trigonometri

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) - \sin (a - b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos (a + b) - \cos (a - b)]$$

$$\tan a \tan b = -\frac{\cos (a + b) - \cos (a - b)}{\cos (a + b) + \cos (a - b)}$$

Selanjutnya bagaimana untuk  $\sin a + \sin b$ ,  $\sin a - \sin b$ ,  $\cos a + \cos b$  dan  $\cos a - \cos b$  ?

Untuk menemukan rumus penjumlahan sinus dan cosinus, substitusikan  $a = \frac{1}{2}(p + q)$  dan  $b = \frac{1}{2}(p - q)$  pada rumus perkalian sinus dan cosinus

Isilah kotak di bawah ini dengan mengetikkan jawaban yang benar

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)]$$

$$\sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2} [\sin (\frac{1}{2}(p + q) + \frac{1}{2}(p - q)) + \sin (\frac{1}{2}(p + q) - \frac{1}{2}(p - q))]$$

$$\sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2} [\sin (\square) + \sin (\square)]$$

$$\square \sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q) = \sin (\square) + \sin (\square)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) - \sin (a - b)]$$

$$\cos \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2} [\sin (\frac{1}{2}(p + q) + \frac{1}{2}(p - q)) - \sin (\frac{1}{2}(p + q) - \frac{1}{2}(p - q))]$$

$$\cos \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2} [\sin (\square) - \sin (\square)]$$

$$\square \cos \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q) = \sin (\square) - \sin (\square)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)]$$

$$\cos \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2} [\cos (\frac{1}{2}(p + q) + \frac{1}{2}(p - q)) + \cos (\frac{1}{2}(p + q) - \frac{1}{2}(p - q))]$$

$$\cos \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2} [\cos (\square) + \cos (\square)]$$

$$\square \cos \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q) = \cos (\square) + \cos (\square)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q)$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos (a + b) - \cos (a - b)]$$

$$\sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q) = -\frac{1}{2} [\cos (\frac{1}{2}(p + q) + \frac{1}{2}(p - q)) - \cos (\frac{1}{2}(p + q) - \frac{1}{2}(p - q))]$$

$$\sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q) = -\frac{1}{2} [\cos (\square) - \cos (\square)]$$

$$\square \sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q) = \cos (\square) - \cos (\square)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q)$$

## RUMUS JUMLAH dan SELISIH SINUS DAN COSINUS

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$$

### Contoh

1. Bentuk perkalian dari  $\sin 5x + \sin 3x$  adalah...

$$\begin{aligned}\sin 5x + \sin 3x &= 2 \sin \frac{1}{2}(\square + \square) \cos \frac{1}{2}(\square - \square) \\ &= 2 \sin \frac{1}{2}(\square) \cos \frac{1}{2}(\square) \\ &= 2 \sin 4x \cos x\end{aligned}$$

Bentuk perkalian dari  $\sin 5x + \sin 3x$  adalah  $2 \sin 4x \cos x$

2. Bentuk sederhana dari  $\sin 80^\circ - \cos 70^\circ$  adalah...

$$\begin{aligned}\sin 80^\circ - \cos 70^\circ &= \sin 80^\circ - \sin (90^\circ - 70^\circ) \\ &= \sin 80^\circ - \sin \square^\circ \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(\square^\circ + \square^\circ) \sin \frac{1}{2}(\square^\circ - \square^\circ) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(\square^\circ) \sin \frac{1}{2}(\square^\circ) \\ &= 2 \cos \square^\circ \sin \square^\circ \\ &= 2 \cos \square^\circ \frac{1}{2} \\ &= \cos 50^\circ\end{aligned}$$

Atau

$$\begin{aligned}
 \sin 80^\circ - \cos 70^\circ &= \cos (90^\circ - 80^\circ) - \cos 70^\circ \\
 &= \cos \square^\circ - \cos 70^\circ \\
 &= -2 \sin \frac{1}{2} (\square^\circ + \square^\circ) \sin \frac{1}{2} (\square^\circ - \square^\circ) \\
 &= -2 \sin \frac{1}{2} (\square^\circ) \sin \frac{1}{2} (\square^\circ) \\
 &= -2 \sin \square^\circ \sin \square^\circ \\
 &= -2 \sin \square^\circ \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \sin 40^\circ
 \end{aligned}$$

Bentuk sederhana dari  $\sin 80^\circ - \cos 70^\circ$  adalah  $\cos 50^\circ$  atau  $\sin 40^\circ$

3. Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan nilai dari  $2 \sin 75^\circ \cos 15^\circ$

$$\begin{aligned}
 2 \sin 75^\circ \cos 15^\circ &= 2 \times \frac{1}{2} [(\sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ))] \\
 &= \sin \square^\circ + \sin \square^\circ \\
 &= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Jadi nilai dari  $2 \sin 75^\circ \cos 15^\circ$  adalah  $1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$