• Crescimento e decrescimento da função afim

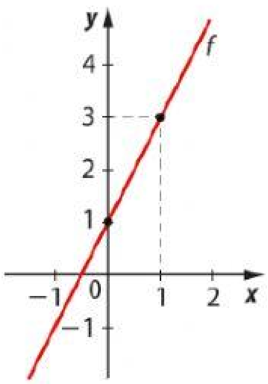
Uma função f é **crescente** em um intervalo $[a, b]$ de seu domínio $D(f)$ quando, para quaisquer valores de x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Uma função f é **decrescente** em um intervalo $[a, b]$ de seu domínio $D(f)$ quando para quaisquer valores de x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

No caso da função afim, podemos determinar se ela é crescente ou decrescente com base no sinal do coeficiente a na lei de formação $y = ax + b$.

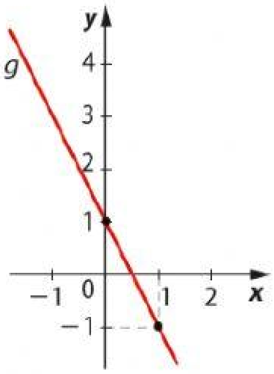
Observe os exemplos a seguir.

a) $f(x) = 2x + 1 \ (a > 0)$



■ Aumentando os valores atribuídos a x, aumentam também os valores correspondentes da imagem $f(x)$. A função f é **crescente** em todo seu domínio.

b) $g(x) = -2x + 1 \ (a < 0)$

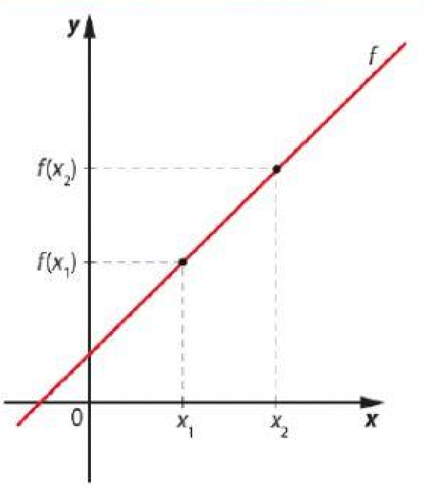
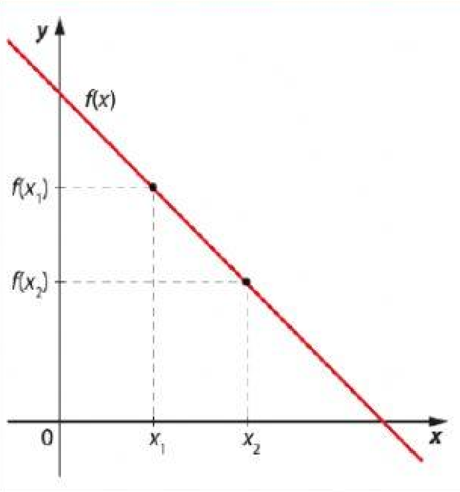
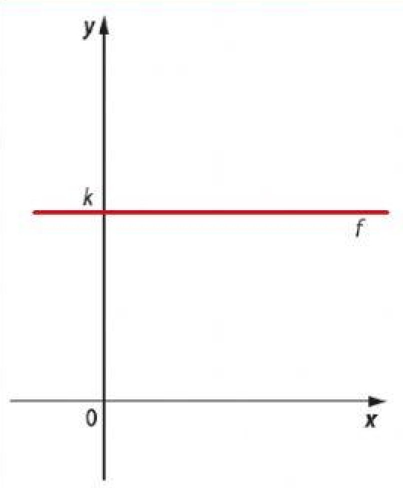


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ Aumentando os valores atribuídos a x, diminuem os valores correspondentes da imagem $g(x)$. A função g é **decrescente** em todo seu domínio.

De modo geral, para uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, temos:

- se $a > 0$, então a função f é crescente;
- se $a < 0$, então a função f é decrescente;
- se $a = 0$, então a função f é constante.

<table>
<tr><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th><th>$a = 0$</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>• O gráfico de uma função afim crescente é uma reta ascendente.
• f é crescente se, e somente se: $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.</td>
<td>• O gráfico de uma função afim decrescente é uma reta descendente.
• f é decrescente se, e somente se: $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.</td>
<td>• O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x.
• f é constante se, e somente se: $\forall x \in D(f), f(x) = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$.</td>
</tr>
</table>

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

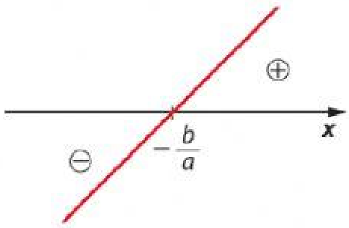
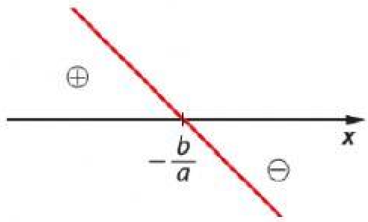
• Estudo do sinal da função afim

Considerando uma função f, de domínio $D(f)$, temos:

- f é **positiva** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) > 0$;
- f é **negativa** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) < 0$;
- f é **nula** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) = 0$ (zeros da função).

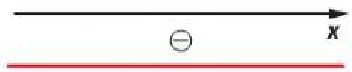
Para estudar o sinal de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, considerando $a \neq 0$, podemos inicialmente determinar o zero da função, que genericamente pode ser escrito como $x = -\frac{b}{a}$.

Em seguida, desenhamos um esboço do gráfico da função afim, levando em consideração o fato de ela ser crescente ($a > 0$) ou ser decrescente ($a < 0$). Por fim, analisamos esse esboço, como indicado a seguir.

$a > 0$		$a < 0$	
	$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$		$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$

Observações:

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, a função afim é a função constante dada por $f(x) = b$. Nesse caso, temos:

$b > 0$	$b < 0$
 $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$	 $f(x) < 0$ para todo $x \in D(f)$

- Se $a = 0$ e $b = 0$, a função afim é a função nula dada por $f(x) = 0$. Portanto, a função é nula para todos os valores de x do domínio.

• Inequações do 1º grau

Denominamos **inequação do 1º grau** na incógnita x toda desigualdade que pode ser escrita em uma das formas a seguir, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$:

- $ax + b \geqslant 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b \leqslant 0$
- $ax + b < 0$

Caso a inequação não esteja em uma das formas indicadas, podemos manipulá-la algebricamente para, em seguida, resolvê-la. Por exemplo:

$$4(x - 1) \geqslant 5x - 3 \Rightarrow 4x - 4 \geqslant 5x - 3 \Rightarrow 4x - 5x - 4 + 3 \geqslant 0 \Rightarrow -x - 1 \geqslant 0$$

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

01. Estude o sinal da função afim f definida por $f(x) = 2x - 4$.

Resolução

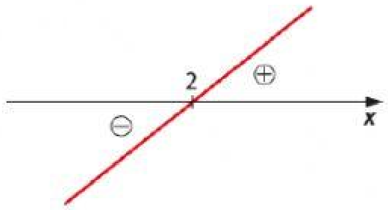
Essa função é crescente, pois $a > 0$.

O zero da função afim f é dado por:

$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{(-4)}{2} = 2$$

Logo, a reta cruza o eixo x no ponto de abscissa $x = 2$.

Esboçando o gráfico, temos:



Analisando o esboço do gráfico, concluímos que:

$f(x) = 0$ para $x = 2$;

$f(x) > 0$ para $x > 2$;

$f(x) < 0$ para $x < 2$.

02. O faturamento líquido relativo de certo produto, em reais, é calculado por $f(x) = 4x - 1000$. Nessa lei, $f(x)$ representa o faturamento líquido de x unidades vendidas. Determine a quantidade mínima de unidades que devem ser vendidas para que haja lucro nessa indústria.

Resolução

Determinar a quantidade mínima de unidades vendidas para que a indústria tenha lucro é determinar o valor mínimo de x para que se tenha $f(x) > 0$.

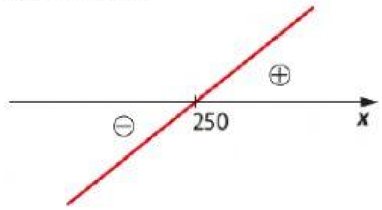
Observe que o domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{N}$, pois x representa o número de unidades vendidas. Assim, o gráfico de f é formado por pontos alinhados, mas, como faremos apenas um esboço do gráfico, traçaremos uma reta como se o domínio fosse o conjunto $\mathbb{R}$.

Essa função é crescente, pois $a > 0$.

Determinamos o zero da função:

$4x - 1000 = 0 \Rightarrow 4x = 1000 \Rightarrow x = 250$

Esboço do gráfico:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Analisando o esboço do gráfico, temos:

$f(x) = 0$ para $x = 250$ (lucro zero);

$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 250\}$ (lucro);

$f(x) < 0$ para $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 250\}$ (prejuízo).

Portanto, para haver lucro, é necessário vender pelo menos 251 unidades desse produto.

03. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $4x - 1 + 2(1 - 3x) \leqslant 0$.

Resolução

Inicialmente, manipulamos algebricamente a inequação para deixá-la na forma $ax + b \leqslant 0$.

$4x - 1 + 2(1 - 3x) \leqslant 0$

$4x - 1 + 2 - 6x \leqslant 0$

$-2x + 1 \leqslant 0$

Em seguida, resolvemos a inequação obtida:

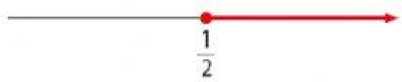
$-2x \leqslant -1$

$(-1) \cdot (-2x) \geqslant (-1) \cdot (-1)$

Ao multiplicar ambos os membros por um número negativo, invertemos o sentido da desigualdade.

$$2x \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$$

Na reta real, podemos representar essa solução da seguinte maneira:



Portanto, o conjunto solução dessa inequação é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$.

04. Paula vai estacionar seu carro e estava analisando os preços de dois estacionamentos.

- Estacionamento **A**: R$ 10,00 a primeira hora; R$ 4,00 cada hora adicional.
- Estacionamento **B**: R$ 16,00 a primeira hora; R$ 2,00 cada hora adicional.

Sabendo que a previsão é de que o carro fique estacionado durante 5 horas, qual é a opção mais vantajosa para Paula?

Resolução

Podemos escrever a lei que representa o valor cobrado pelo estacionamento, em reais, em função do tempo, em hora, em cada caso e calcular o valor da função quando $x = 5$.

Estacionamento **A**

$f(x) = 10 + 4x$

$f(5) = 10 + 4 \cdot 5 = 30$

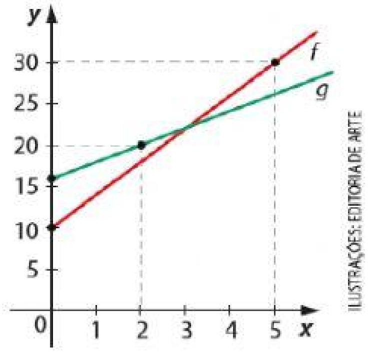
Estacionamento **B**

$g(x) = 16 + 2x$

$g(5) = 16 + 2 \cdot 5 = 26$

Nessas condições, a opção mais vantajosa para Paula é o estacionamento **B**.

Podemos representar essas duas funções em um mesmo sistema cartesiano e interpretá-las geometricamente.



Podemos determinar o valor de x para o qual $f(x) = g(x)$:

$10 + 4x = 16 + 2x \qquad 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Nesse caso, se o carro ficar estacionado durante 3 horas, ela paga o mesmo valor em qualquer dos estacionamentos.

Se $x < 3$, $f(x) < g(x)$, portanto, o estacionamento **A** é mais vantajoso.

Se $x > 3$, $g(x) < f(x)$, portanto, o estacionamento **B** é mais vantajoso.

Exercícios

01. Identifique como crescente, decrescente ou constante cada função afim definida a seguir.

a) $y = \frac{2}{5}x + 1$

b) $y = -2x + 3$

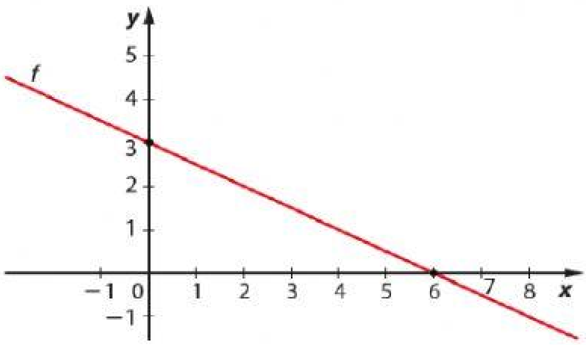
c) $f(x) = \sqrt{2}$

d) $f(x) = 3{,}5 - 0{,}4x$

e) $y = -5x$

f) $f(x) = -6$

02. Observe o gráfico da função afim a seguir e faça o que se pede.



a) A função representada é crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

b) Determine a lei dessa função.

c) Estude o sinal dessa função.

03. Seja f uma função real de variável real, definida por $f(x) = x(3 - x) + (x - 1)^2$.

a) Mostre que f é uma função afim.

b) Determine o zero da função f.

c) Determine x de modo que $f(x) > 0$.

04. Estude o sinal de cada função a seguir.

a) $f(x) = x + 5$

b) $y = -3x + 9$

c) $y = \frac{x}{3} - 1$

d) $f(x) = 2 - \frac{x}{2}$

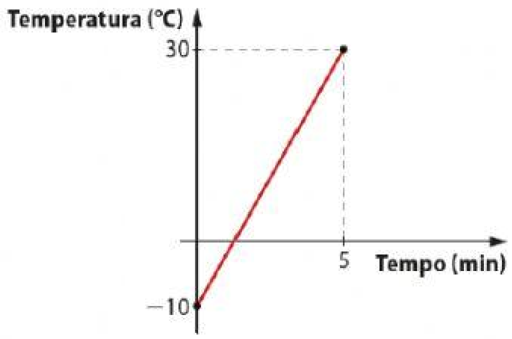
05. Uma função afim f é tal que seu gráfico intersecta o eixo x no valor de abscissa -3 e passa pelo ponto $(1, 2)$. A partir dessas informações, faça o que se pede.

a) Esboce o gráfico dessa função.

b) Determine a lei de formação da função f.

c) Estude o sinal dessa função.

06. Uma barra de metal com temperatura inicial de −10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico a seguir representa a temperatura da barra em função do tempo.



a) Em quanto tempo após o início da experiência a temperatura atingiu 0 °C?

b) Em qual intervalo de tempo a temperatura da barra ficou positiva? E negativa?

07. (Vunesp-SP) Uma pessoa obesa, pesando num certo momento 156 kg, recolhe-se a um *spa* onde se anunciam perdas de peso de até 2,5 kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:

a) Encontre uma fórmula que expresse o peso mínimo, P, que essa pessoa poderá atingir após n semanas.

b) Calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no *spa* para sair de lá com menos de 120 kg de peso.

08. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações a seguir.

a) $5x - 2(x + 2) \geqslant 1 - (3 - 4x)$

b) $\dfrac{3(x+1)}{2} - \dfrac{x-1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$

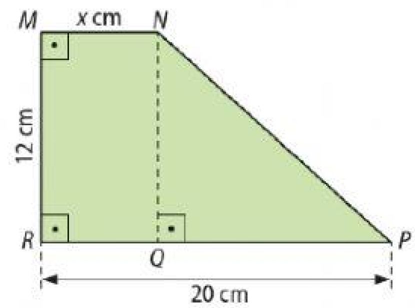
09. Quais são os valores de x, no conjunto dos números naturais, que satisfazem à inequação $7x - 8 < 4x + 1$?

10. As medidas do comprimento e da largura de um retângulo são 10 cm e x cm, respectivamente. Calcule x para que:

a) a área do retângulo seja maior do que 50 cm²;

b) o perímetro do retângulo não seja menor do que 32 cm.

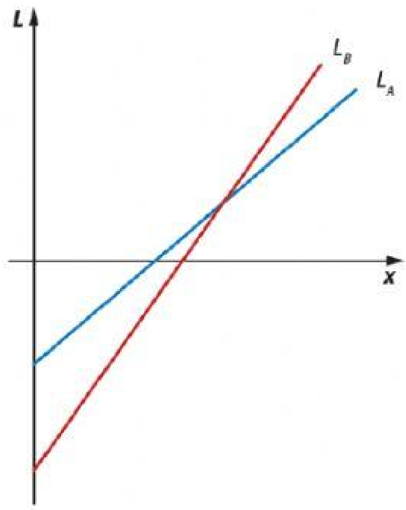
11. Observe a figura, sabendo que $MNPR$ é um trapézio retângulo e responda às questões a seguir.



a) Determine o maior valor inteiro de x de modo que a área do trapézio seja maior do que o dobro da área do retângulo $MNQR$.

b) Caso a medida do lado $\overline{MR}$ não fosse fornecida, ainda assim seria possível resolver o problema? Justifique sua resposta.

12. (FGV-SP) A figura fornece os gráficos dos lucros anuais L_A e L_B de duas empresas (em milhares de reais) em função da quantidade anual produzida e vendida (x).



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

As intersecções dos gráficos com os eixos são:

	L_A	L_B
eixo x	(50, 0)	(60, 0)
eixo y	(0, −500)	(0, −1000)

a) Obtenha L_A em função de x.

b) Para que valores de x o lucro L_B é superior ao L_A?