

• Paralelismo no espaço

Estudamos as posições relativas de duas retas, de uma reta e um plano e de dois planos. Em alguns desses casos, falamos a respeito de paralelismo no espaço. Vamos retomar essas ideias:

- Duas retas são paralelas quando são coplanares e não tem ponto em comum.
- Uma reta é paralela a um plano quando eles não têm ponto em comum.
- Dois planos são paralelos quando não tem ponto em comum.

• Teoremas sobre paralelismo

Teorema 4: Se uma reta r é paralela a um plano α e se um plano β contém r e é secante a α , segundo uma reta s , então as retas r e s são paralelas.

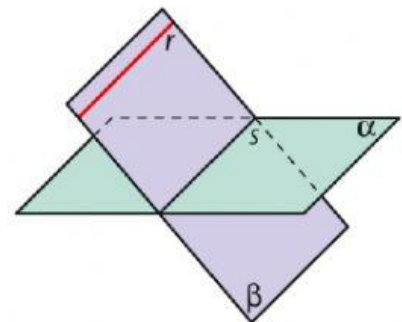
Para demonstrar esse teorema, vamos primeiro explicitar a hipótese e a tese.

Hipótese

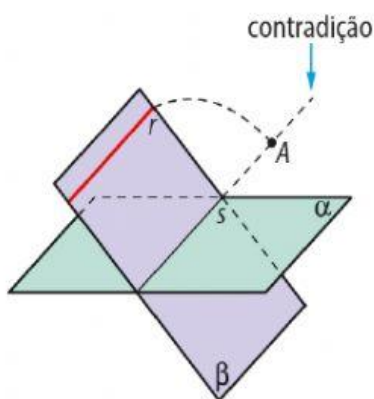
$$\begin{aligned} r // \alpha \\ \beta \supset r \\ \alpha \cap \beta = s \end{aligned}$$

Tese

$$r // s$$



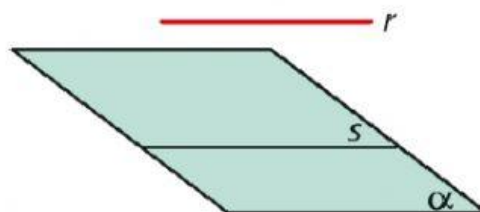
Demonstração



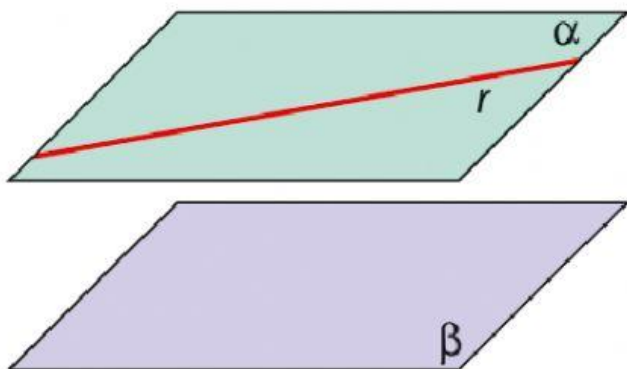
Vamos realizar a demonstração por absurdo. Para isso, admitimos que a negação da tese seja verdadeira, isto é, r não é paralela a s . Se isso fosse verdade, como r e s estão contidas no plano β , elas seriam retas concorrentes e teriam um ponto A em comum. Mas, como $s \subset \alpha$, o ponto A pertenceria a r e a α , o que contraria a hipótese $r // \alpha$.

Como chegamos a uma contradição da hipótese, concluímos que a afirmação inicial de que r não é paralela a s é falsa. Portanto, r é paralela a s .

Teorema 5: Se uma reta r , não contida em um plano α , é paralela a uma reta s , contida em α , então r e α são paralelos.



Teorema 6: Se α e β são planos paralelos, então qualquer reta r contida em α é paralela ao plano β .



Teorema 7: Se um plano α contém duas retas, r e s , concorrentes e ambas paralelas a outro plano, β , então α e β são paralelos.

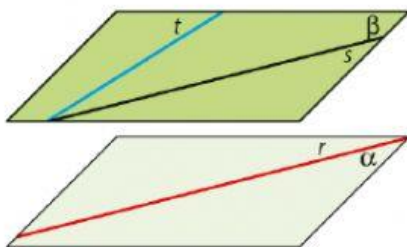
> ATIVIDADE RESOLVIDA

01. Dentre as afirmativas a seguir, referentes à Geometria de posição, determine a única que é falsa.

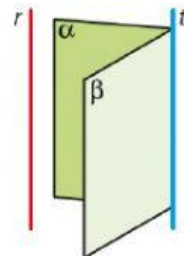
- I. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ou é reversa a qualquer reta do outro.
- II. Se uma reta é paralela a dois planos, então os planos são paralelos.
- III. Se dois planos paralelos intersectam um terceiro, então as intersecções são retas paralelas.

Resolução

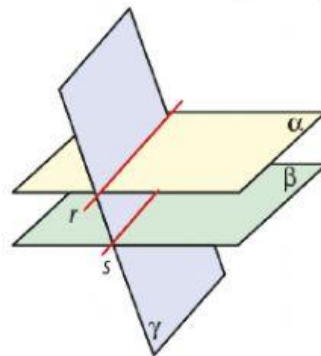
- I. A afirmação é verdadeira. Se $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta = \emptyset$, então $r \cap s = \emptyset$. Logo, $r \parallel s$ ou r é reversa a s . Na figura, $r \parallel s$ e r é reversa a t .



- II. A afirmação é falsa, pois podemos ter $r \parallel \alpha$, $r \parallel \beta$ e $r \parallel t$, em que $t = \alpha \cap \beta$, como mostra a figura a seguir.



- III. A afirmação é verdadeira. Se $\alpha \cap \beta = \emptyset$, $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então $r \cap s = \emptyset$. Como $r \cap s = \emptyset$, $r \subset \gamma$ e $s \subset \gamma$, então $r \parallel s$.



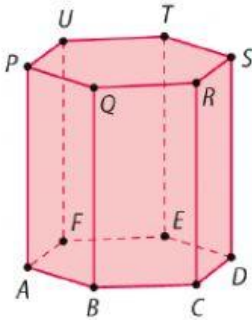
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, a única alternativa falsa é a II.

Exercícios

01. A figura a seguir representa um sólido geométrico chamado prisma reto de base hexagonal. Nessa figura, temos:

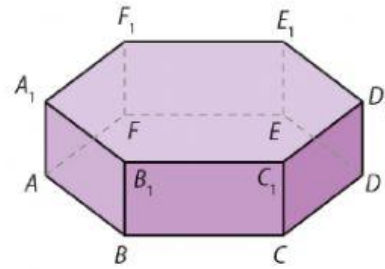
- as bases são os hexágonos regulares $ABCDEF$ e $PQRSTU$;
- os planos que contêm as bases são paralelos;
- os segmentos de reta que unem as bases são paralelos entre si. Por exemplo: $\overline{AP} \parallel \overline{CR}$;
- os segmentos de reta que unem as bases são perpendiculares às bases.



A partir dessas informações, faça o que se pede em cada item.

- Indique uma reta paralela à reta \overline{DE} .
 - A reta \overline{BC} é paralela ao plano que contém o hexágono $PQRSTU$? Justifique.
 - Sabendo que \overline{EF} e \overline{UF} são paralelas ao plano que contém o quadrilátero $BCRQ$, o que podemos afirmar sobre esse plano e o plano que contém o quadrilátero $EFUT$? Justifique sua resposta.
02. (PUC-SP) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?
- Se duas retas concorrentes de um plano são respectivamente paralelas a duas retas de outro plano, então esses planos são paralelos.
 - Por uma reta dada pode-se conduzir um plano paralelo a um plano dado.
 - Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que se apoie em duas retas reversas dadas.
 - Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
 - Existem planos reversos.

03. (UFPE) A figura abaixo ilustra um prisma hexagonal regular $ABCDEF, A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Analise a veracidade das afirmações seguintes, referentes às posições relativas de retas e planos contendo vértices desse prisma.

- A reta contendo a aresta \overline{AB} e a reta contendo a aresta $\overline{D_1E_1}$ são paralelas entre si.
 - A reta contendo a aresta \overline{AB} e a reta contendo a aresta $\overline{C_1D_1}$ são reversas.
 - O plano contendo a face ABB_1A_1 e o plano contendo a face DEE_1D_1 são paralelos.
 - O plano contendo a face ABB_1A_1 e o plano contendo a face CDD_1C_1 são paralelos entre si.
 - A reta contendo a aresta \overline{AB} é paralela ao plano contendo a face CDD_1C_1 .
04. (ITA-SP) Quais são as sentenças falsas?
- Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles interceptam o outro.
 - Se um plano contém duas retas distintas e paralelas a outro plano, então esses planos são paralelos.
 - Em dois planos paralelos distintos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano.
 - Se uma reta é paralela a um plano, então essa reta é paralela a infinitas retas desse plano.
 - Se uma reta é paralela a um plano, então é paralela a todas as retas do plano.
- I; II; III
 - I; II; V
 - I; III; IV
 - II; III; IV
 - I; II; IV