Gráfico da função afim

Vimos que o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

É possível demonstrar que o gráfico da função afim é uma **reta.** Com base nisso, podemos localizar no sistema cartesiano dois pontos distintos pertencentes ao gráfico da função afim e traçar a reta correspondente.

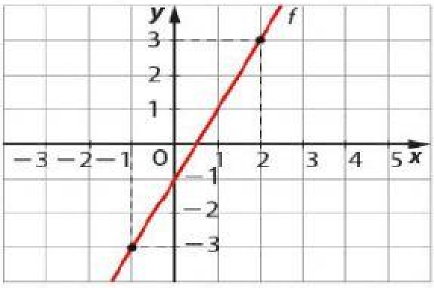
Inicialmente, construímos uma tabela com dois valores de $x \in \mathbb{R}$ e determinamos os valores de $y = f(x)$ para obter os pares ordenados desses pontos. Em seguida, localizamos esses pontos no sistema cartesiano e traçamos a reta determinada por eles, que é o gráfico da função f.

Acompanhe alguns exemplos.

a) O gráfico da função afim definida por $f(x) = 2x - 1$.

Primeiramente, escolhemos dois valores reais para x e obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico de f. Em seguida, traçamos o gráfico.

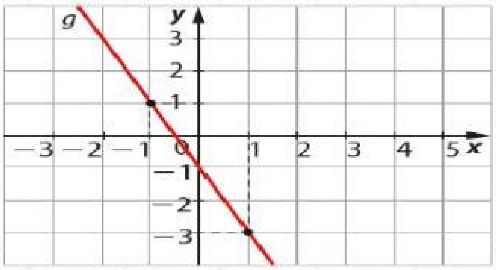
x	$y = 2x - 1$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
2	$y = 2 \cdot (2) - 1 = 3$	$(2, 3)$



b) O gráfico da função afim definida por $g(x) = -2x - 1$.

Inicialmente, escolhemos dois valores reais para x e obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico de g. Em seguida, traçamos o gráfico.

x	$y = -2x - 1$	(x, y)
-1	$y = -2 \cdot (-1) - 1 = 1$	$(-1, 1)$
1	$y = -2 \cdot (1) - 1 = -3$	$(1, -3)$

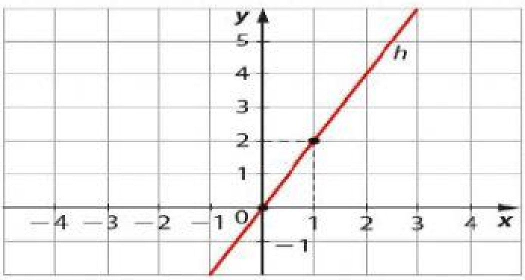


c) O gráfico da função afim definida por $h(x) = 2x$.

Observe que a função h é uma função linear. Como a lei de formação de uma função linear é da forma $y = ax$, substituindo $x = 0$ nessa lei, temos $y = a \cdot 0 = 0$.

Portanto, o gráfico da função linear sempre passa pelo ponto (0, 0), origem do sistema cartesiano.

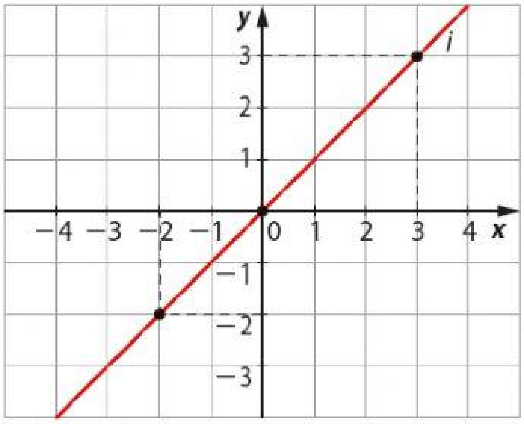
x	$y = 2x$	(x, y)
0	$y = 2 \cdot (0) = 0$	(0, 0)
1	$y = 2 \cdot (1) = 2$	(1, 2)



d) O gráfico da função afim definida por $i(x) = x$.

Observe que a função i é a função identidade, que associa cada valor de x do domínio a ele mesmo. O gráfico da função i também passa pela origem do sistema cartesiano.

x	$y = x$	(x, y)
-2	$y = -2$	$(-2, -2)$
3	$y = 3$	$(3, 3)$

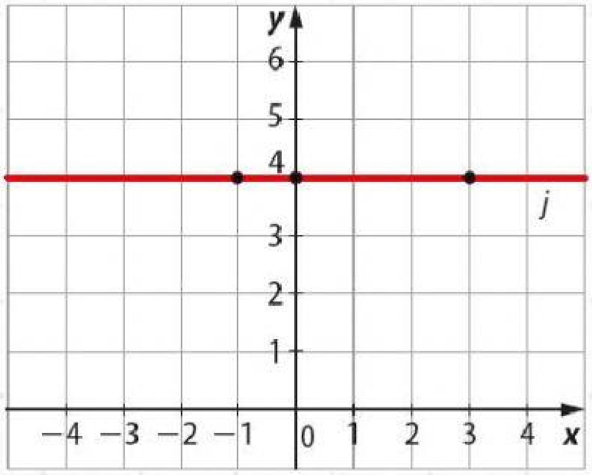


O gráfico da função identidade é a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

e) O gráfico da função afim definida por $j(x) = 4$.

Observe que a função j é uma função constante. Para qualquer valor de x no domínio da função, y é igual a 4. Portanto, o gráfico é uma reta paralela ao eixo x que intersecta o eixo y no ponto $(0, 4)$.

x	$y = 4$	(x, y)
-1	$y = 4$	$(-1, 4)$
3	$y = 4$	$(3, 4)$



O gráfico de uma função constante definida por $y = k$, em que $k \in \mathbb{R}$, é uma reta paralela ao eixo x que intersecta o eixo y no ponto $(0, k)$.

Zero da função afim

Em uma função $f: A \to B$, um valor de $x \in A$ tal que $f(x) = 0$ é chamado **zero da função** f.

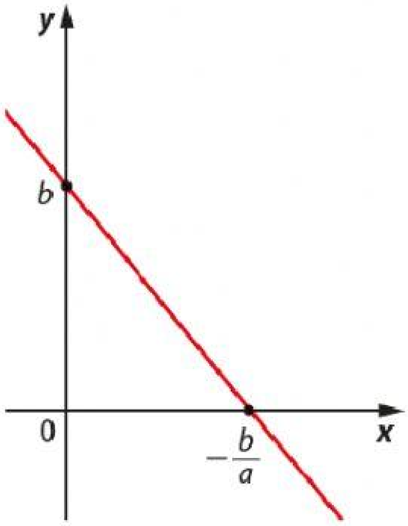
No caso da função afim, definida por $f(x) = ax + b$, quando $a \neq 0$, resolvemos a equação $f(x) = 0$, ou seja, $ax + b = 0$ para determinar o zero da função f. Nesse caso, temos:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Logo, quando $a \neq 0$, o zero de uma função afim é dado por $x = -\frac{b}{a}$. O zero da função afim é a abscissa do ponto em que o gráfico cruza o eixo x, como indicado na figura.

Se $a = 0$, temos duas situações:

- $b \neq 0$: nesse caso, temos uma função constante cujo gráfico não cruza o eixo x e, portanto, não há zero da função;
- $b = 0$: nesse caso, temos uma função constante dada por $y = 0$, conhecida também como função nula, cujo gráfico é uma reta coincidente com o eixo x e, portanto, todo $x \in \mathbb{R}$ é zero da função nula.



Taxa de variação

Considerando uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dois números reais x_1 e x_2, tais que $x_1 < x_2$, a **taxa de variação média da função** no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

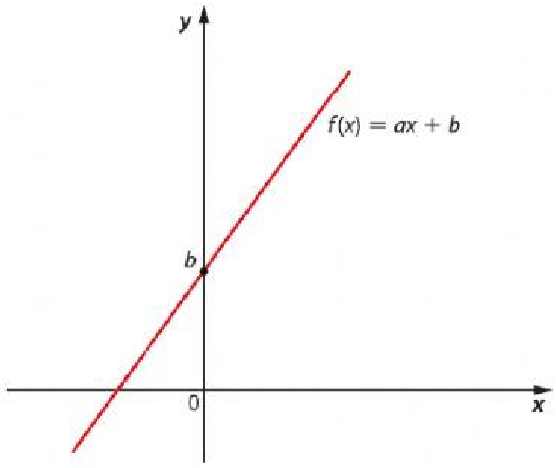
Podemos determinar a taxa de variação média da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, em um intervalo $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$, da seguinte maneira:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Logo, a taxa de variação média da função afim definida por $f(x) = ax + b$, em relação a x, é dada pelo coeficiente a.

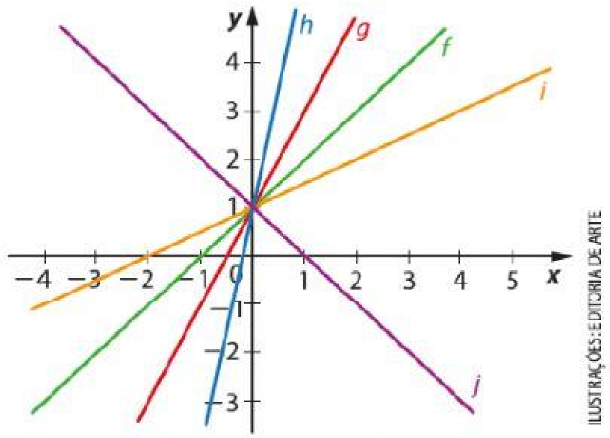
O coeficiente a é também conhecido como **coeficiente angular** ou **declividade** da reta correspondente ao gráfico da função afim e está relacionado com a inclinação da reta em relação ao eixo x.

O coeficiente b, denominado **coeficiente linear** dessa reta, é a ordenada do ponto em que o gráfico da função afim cruza o eixo y.



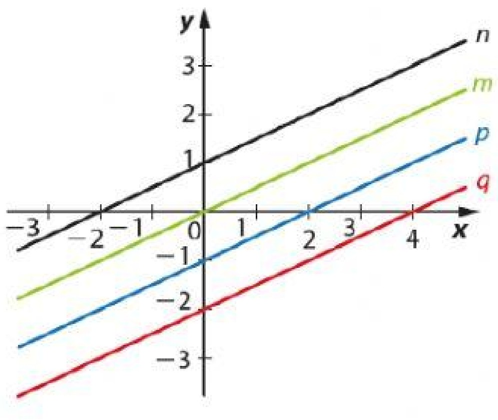
Observe e compare, em um mesmo sistema cartesiano, o gráfico de algumas funções afins, considerando diferentes valores de a.

- $f(x) = x + 1$
- $g(x) = 2x + 1$
- $h(x) = 5x + 1$
- $i(x) = \frac{1}{2}x + 1$
- $j(x) = -x + 1$



Observe e compare agora, em um mesmo sistema cartesiano, o gráfico de algumas funções afins, considerando diferentes valores de b.

- $m(x) = \frac{1}{2}x$
- $n(x) = \frac{1}{2}x + 1$
- $p(x) = \frac{1}{2}x - 1$
- $q(x) = \frac{1}{2}x - 2$



> ATIVIDADES RESOLVIDAS

01. Considere a função afim dada por $f(x) = -3x + 5$ e determine:

a) o valor da função para $x = 0$;

b) o zero da função.

Resolução

a) Para determinar $f(0)$, substituímos o valor de x na lei da função dada.

$f(0) = -3 \cdot 0 + 5 \Rightarrow f(0) = 5$

Portanto, o valor da função para $x = 0$ é $f(0) = 5$.

b) Para determinar o zero da função, devemos calcular x para que $f(x) = 0$. Assim, temos:

$-3x + 5 = 0 \Rightarrow -3x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Portanto, o zero da função é $x = \frac{5}{3}$.

13. Um automóvel andava a 72 km/h, o que equivale a 20 m/s, até o momento em que é freado. Com isso, sua velocidade v, em metro por segundo, varia em função do tempo t, em segundo, de acordo com a lei $v = 20 - 4t$, até o instante em que o automóvel para completamente ($v = 0$ m/s).

a) Qual é o instante em que o automóvel para completamente?

b) Qual é o domínio dessa função?

c) Construa o gráfico dessa função.

d) Qual é a taxa de variação da função v?

Resolução

a) Para obter o instante no qual o automóvel para completamente determinamos o zero da função v.

$0 = 20 - 4t \Rightarrow 4t = 20 \Rightarrow t = 5$

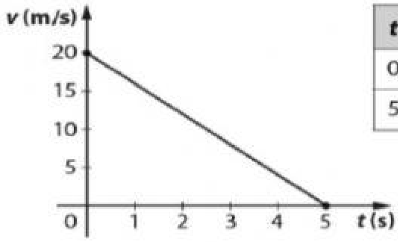
Portanto, o automóvel para completamente no instante $t = 5$ s.

b) A situação ocorre do instante inicial ($t = 0$ s) até o momento em que o automóvel para completamente ($t = 5$ s). Portanto, o domínio da função é $D(v) = [0, 5]$.

LEVI BIANCO/MOMENT/GETTY IMAGES

■ É importante manter a distância segura recomendada entre carros para evitar acidentes em caso de necessidade de parada brusca.

c) Como a lei da função v é da forma $y = ax + b$, então essa função é uma função afim. Como $0 \leqslant t \leqslant 5$, o gráfico de v é um segmento de reta. Para construí-lo, escolhemos dois valores de t no domínio de v, obtemos os pares ordenados de dois pontos pertencentes ao gráfico, localizamos esses pontos no sistema cartesiano e traçamos o segmento, como indicado a seguir.

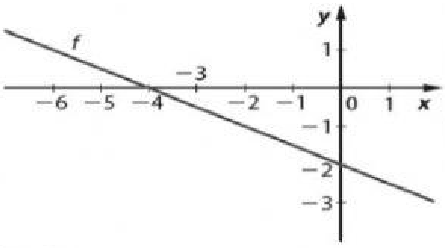


t	v	(t, v)
0	5	(0, 20)
5	0	(5, 0)

Observe que $D(v) = [0, 5]$ e $Im(v) = [0, 20]$.

d) Como a função v é dada na forma $y = ax + b$, a taxa de variação de v é dada pelo coeficiente a. Logo, a taxa de variação de v é -4.

14. Observe a seguir o gráfico da função afim f e determine a lei de formação dessa função.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Como f é uma função afim, sua lei de formação é do tipo $f(x) = ax + b$.

Observando o gráfico, temos:

- -4 é o zero da função f, pois $f(-4) = 0$;
- -2 é o coeficiente linear do gráfico, pois é a ordenada do ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo y. Assim, $b = -2$.

Substituindo esses valores na lei $y = ax + b$, obtemos o valor de a.

$0 = a \cdot (-4) + (-2) \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Portanto, a lei de formação da função f é $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$.

Exercícios

01. Construa no sistema cartesiano ortogonal o gráfico das funcões afins dadas por:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $g(x) = -x + 4$

c) $y = \frac{1}{2} - x$

d) $h(x) = -2x$

02. Determine o valor de p de modo que o gráfico da função, definida por $f(x) = 3x + p - 2$, cruze o eixo y no ponto de ordenada 4.

03. Determine m de modo que o gráfico da função f, dada por $f(x) = -2x + 4m + 5$, cruze o eixo x no ponto de abscissa 3.

04. Determine o zero de cada uma das funções afins definidas a seguir.

a) $f(x) = -3x + 4$

b) $y = \frac{3}{8}x$

c) $y = 2x + 8$

d) $y = 6 + \frac{x}{4}$

05. (Ufop-MG) O custo total da fabricação de determinado artigo depende do custo de produção, que é de R$ 45,00 por unidade fabricada, mais um custo fixo de R$ 2 000,00. Pede-se:

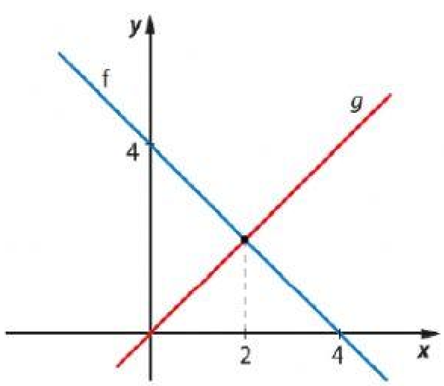
a) A função que representa o custo total em relação à quantidade fabricada.

b) O custo total da fabricação de 10 unidades.

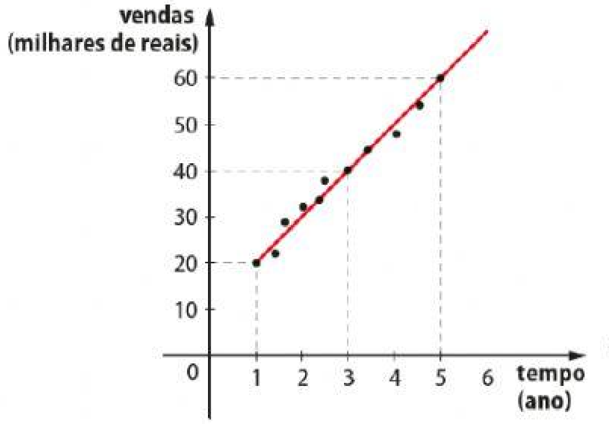
c) O número de unidades que deverão ser fabricadas para que o custo total seja de R$ 3 800,00.

d) O gráfico da função custo total, destacando os dados obtidos nos itens anteriores.

06. Observe os gráficos das funções f e g e determine a lei de formação de cada uma delas.



07. O gerente da loja de artigos para *pets* fez um levantamento das vendas da loja ao longo dos últimos cinco anos e observou que os valores poderiam ser aproximados por uma reta. Com base nos dados obtidos, construiu o gráfico que representa as vendas (em milhares de reais) em função do tempo (em ano).



Observe o gráfico e faça o que se pede em cada caso.

a) Determine a lei de formação da função representada pelo gráfico.

b) Se as vendas da loja mantiverem a evolução apresentada nos últimos cinco anos, qual será a projeção de vendas para o sétimo ano de observação?

c) Reúna-se a um colega, e respondam: as informações disponíveis são suficientes para responder aos itens anteriores? Há algum dado que não foi utilizado? Justifiquem suas respostas.

NOMAD_SOUL/SHUTTERSTOCK.COM

▪ O mercado de produtos para *pets* tem crescido bastante no Brasil.