

• Porcentagem e juros

➤ Porcentagem

Porcentagem é uma maneira de indicar uma razão de denominador 100 ou qualquer representação equivalente a ela.

Exemplos:

a) $60\% = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$
Lê-se: sessenta por cento.

c) $0,12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} = 12\%$

b) $28\% = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} = 0,28$

d) $1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 125\%$

A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa "dividido por cem". Quando utilizamos o sufixo *agem*, indicamos que se trata de um substantivo.

O termo $x\%$, em que x é um número real qualquer, representa a **razão centesimal** $\frac{x}{100}$ e é chamado de **porcentagem** ou **taxa percentual** ou, simplesmente, **percentual**.

Observe que $\frac{x}{100}$ também quer dizer que, em cada grupo de 100 objetos considerados, estamos dando destaque a x desses objetos.

➤ Aumentos e descontos

Um *smartphone* custa R\$ 1.000,00 em determinada loja. Se o cliente optar pelo pagamento à vista, a loja concede um desconto de 5% sobre esse valor.

Para calcular o preço do *smartphone* à vista, precisamos determinar 5% de R\$ 1.000,00 e subtraí-lo do valor inicial.

Nesse caso, temos:

$$5\% \text{ de R\$ } 1.000,00 \rightarrow 0,05 \cdot 1000 = 50, \text{ ou seja, R\$ } 50,00$$

$$\text{R\$ } 1.000,00 - \text{R\$ } 50,00 = \text{R\$ } 950,00$$

Portanto, o preço do *smartphone* à vista é R\$ 950,00.

Também podemos calcular diretamente o valor, da seguinte maneira:

$$1000 - 0,05 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 - 0,05) = 1000 \cdot 0,95 = 950$$

Para calcular o valor de algo após um **desconto de $p\%$** , devemos multiplicar o valor original por $1 - \frac{p}{100}$.

Agora, imagine que essa mesma loja, na semana seguinte, resolveu aplicar um aumento de 3% em todos os seus produtos. Para determinarmos o valor do *smartphone* após o reajuste, calculamos 3% de R\$ 1.000,00 e adicionamos esse resultado ao valor inicial.

$$3\% \text{ de R\$ 1.000,00} \rightarrow 0,03 \cdot 1000 = 30, \text{ ou seja, R\$ 30,00}$$

$$\text{R\$ 1.000,00} + \text{R\$ 30,00} = \text{R\$ 1.030,00}$$

Portanto, o preço do celular após o aumento é R\$ 1030,00.

Também podemos calcular diretamente o valor, da seguinte maneira:

$$1000 + 0,03 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 + 0,03) = 1000 \cdot 1,03 = 1030$$

Para calcular o valor de algo após um **aumento de $p\%$** , devemos multiplicar o valor original por $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

➤ Aumentos e descontos sucessivos

Considere, agora, a situação a seguir.

O preço de um produto sofreu um aumento de 8% em março e, em abril, foi reajustado em 12%. Podemos dizer que aplicar esses dois aumentos sucessivos equivale a aplicar um único aumento de 20% sobre o preço inicial?

Para responder à pergunta da situação, vamos calcular um único aumento de 20% sobre o preço de um produto e, em seguida, aumentos sucessivos de 8% e 12% sobre esse preço, e comparar os resultados obtidos. Suponhamos que o preço inicial do produto seja R\$ 500,00.

I. Aplicando um único aumento de 20% sobre o preço do produto, temos:

$$(1 + 0,2) \cdot 500 = 1,2 \cdot 500 = 600$$

Considerando um único aumento de 20%, obtemos R\$ 600,00.

II. Aplicando os aumentos sucessivos, temos:

- Preço do produto após o primeiro aumento (reajuste em março):

$$(1 + 0,08) \cdot 500 = 1,08 \cdot 500 = 540, \text{ ou seja, R\$ 540,00}$$

- Preço do produto após o segundo aumento (reajuste em abril):

$$(1 + 0,12) \cdot 540 = 1,12 \cdot 540 = 604,80$$

Portanto, o preço do produto após os dois aumentos será R\$ 604,80.

Observe que os valores obtidos nas verificações I e II não são iguais. Isso nos permite exemplificar que aumentos percentuais sucessivos **não equivalem** a um único aumento representado pela soma das porcentagens correspondentes. Analogamente, podemos verificar o mesmo para descontos, ou seja, descontos percentuais sucessivos **não equivalem** a um único desconto percentual, representado pela soma das porcentagens correspondentes.

Para determinar o percentual acumulado envolvendo aumentos ou descontos sucessivos, podemos multiplicar todos os percentuais. Observe, por exemplo, a situação apresentada anteriormente.

- Primeiro reajuste: $(1 + 0,08) \cdot 500$
- Segundo reajuste: $(1 + 0,12) \cdot (1 + 0,08) \cdot 500 = (1 + 0,08 + 0,12 + 0,0096) \cdot 500 = (1 + 0,2096) \cdot 500$

O produto destacado anteriormente indica um aumento correspondente a um percentual acumulado de 20,96%. Assim, aplicar um aumento de 8% sucedido por um aumento de 12% é o mesmo que aplicar um aumento único de 20,96%.

➤ Lucro e prejuízo

Nas transações comerciais e financeiras é comum o uso de termos como **custo**, que corresponde aos gastos envolvidos na produção de um produto e a outras despesas, e **receita** (ou **preço**), que é o valor arrecadado com a venda de um produto.

Quando calculamos a diferença entre a receita e o custo de um produto, temos duas situações:

- se o valor obtido for um número positivo, dizemos que a transação gerou **lucro**;
- se o valor obtido for um número negativo, dizemos que a transação gerou **prejuízo**.

É usual o uso das expressões “preço de custo” (C) para nos referirmos aos custos e “preço de venda” (V) para nos referirmos às receitas. Assim, podemos escrever a seguinte relação para expressar o lucro (L):

$$L = V - C$$

O lucro também pode ser expresso como um percentual em relação ao preço de custo ou ao preço de venda. Por exemplo: uma mercadoria, cujo preço de custo é R\$ 280,00, foi vendida por R\$ 320,00, gerando um lucro de R\$ 40,00. Assim:

- o percentual de lucro sobre o preço de custo é: $\frac{L}{C} = \frac{40}{280} = \frac{1}{7} \approx 0,1428 \approx 14,3\%$
- o percentual de lucro sobre o preço de venda é: $\frac{L}{V} = \frac{40}{320} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$

Exemplos

1. Um vestido que custa R\$ 540,00 tem desconto de 20% se comprado à vista. Qual é o preço à vista do vestido?

Resolução

Para determinar o preço do vestido à vista, podemos multiplicar o valor inicial por $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$:

$$540 \cdot (1 - 0,2) = 540 \cdot 0,8 = 432$$

Portanto, o preço do vestido à vista é R\$ 432,00.

2. Edgar teve um aumento salarial de 10% e passou a receber R\$ 1.650,00. Qual era o salário de Edgar antes do reajuste?

Resolução

O salário anterior correspondia a 100%. Como houve um aumento de 10%, o novo salário passou a corresponder a $100\% + 10\% = 110\%$. Assim, temos:

percentual 100% $\rightarrow$ 110%

salário x $\rightarrow$ 1650

$$\frac{100}{x} = \frac{110}{1650} \Rightarrow 110x = 100 \cdot 1650 \Rightarrow x = 165000 : 110 \Rightarrow x = 1500$$

O salário de Edgar antes do reajuste era R\$ 1.500,00.

3. A população atual de uma cidade é de aproximadamente 50 000 habitantes. Sabendo que essa população cresce 10% ao ano, qual será a população dessa cidade daqui a três anos?

Resolução

Sabendo que a população cresce 10% ao ano, obtemos o percentual acumulado ao considerarmos três anos:

$$(1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10) = 1,331$$

Aplicando esse percentual acumulado sobre 50 000, temos:

$$50\,000 \cdot 1,331 = 66\,550$$

Portanto, em três anos essa população será de aproximadamente 66 550 habitantes.

4. Sobre o valor de uma mercadoria foram aplicados dois descontos sucessivos, um de 10% e outro de 12%. Calcule o percentual acumulado de descontos correspondente a esses dois descontos sucessivos.

Resolução

Representando o preço inicial da mercadoria por x e aplicando os dois descontos sucessivos, temos:

$$(1 - 0,1) \cdot (1 - 0,12) \cdot x = 0,9 \cdot 0,88 \cdot x = 0,792x \text{ ou } 79,2\% \text{ de } x.$$

Como o valor inicial representa 100%, podemos concluir que o desconto equivalente é de $100\% - 79,2\% = 20,8\%$.

5. Um produto, cujo preço de custo é R\$ 420,00, é vendido com um lucro de 30% sobre o preço de venda. Qual é o preço de venda desse produto?

Resolução

Considerando C o preço de custo, L o lucro e V o preço de venda, temos: $L = V - C$. ①

Do enunciado, temos:

$$\frac{L}{V} = 30\% \Rightarrow \frac{L}{V} = 0,30 \Rightarrow L = 0,30V \quad \textcircled{II}$$

Substituindo $\textcircled{II}$ em $\textcircled{I}$, obtemos:

$$0,30V = V - C \Rightarrow C = V - 0,30V \Rightarrow C = 0,70V$$

Substituindo $C = 420$, determinamos V :

$$420 = 0,70V \Rightarrow V = 600$$

Portanto, o preço de venda é R\$ 600,00.

- 6.** Um produto, cujo preço de custo era R\$ 800,00, foi vendido por R\$ 980,00. Qual foi o percentual de lucro sobre o preço de custo?

Resolução

Sendo L o lucro, C o preço de custo e V o preço de venda, temos:

$$L = V - C \Rightarrow L = 980 - 800 \Rightarrow L = 180$$

Logo, o lucro foi R\$ 180,00.

$$\text{Assim, temos: } \frac{L}{C} = \frac{180}{800} = 0,225 = 22,5\%$$

Portanto, o percentual de lucro sobre o preço de custo foi de 22,5%.

Exercícios

1. Copie o quadro a seguir e complete com os valores que estão faltando.

Fração	Representação decimal	Porcentagem
$\frac{9}{10}$	0,9	90%
	0,25	
$\frac{13}{200}$		6,5%
		47%
$\frac{2}{25}$		

2. Calcule.

- a) 14% de 3 000 c) 0,6% de 300
b) 9% de 250 d) 24% de 1 000

3. A população de uma cidade, com cerca de 90 000 habitantes, cresce anualmente 2,5%. Quantos habitantes essa cidade terá:

- a) ao fim de 1 ano? b) ao fim de 2 anos?

4. (ESPM-SP) Deseja-se obter cópia reduzida de um documento. A fotocopadora opera reduzindo proporcionalmente as dimensões do documento original. Sabendo-se que, para cópias comuns, o equipamento indica em seu visor: "Dimensão = 100%", qual deverá ser o valor digitado no painel de comandos, para que a área do documento reduzido seja igual a um quarto de área do documento original?

5. (UFPE) Em um exame de vestibular, 30% dos candidatos eram da área de Ciências Sociais. Dentre estes candidatos, 20% optaram pelo curso de Administração. Indique a porcentagem, relativa ao total de candidatos, dos que optaram por Administração.

6. Uma mercadoria tem seu preço reajustado anualmente com um acréscimo de 5%. Supondo que o preço atual seja R\$ 200,00, qual será o preço dessa mercadoria daqui a 3 anos?

7. (UFV-MG) A viação *No Leito do Asfalto* faz a linha entre duas cidades que distam 800 km uma da outra. Por questão de segurança, foram determinadas duas paradas obrigatórias para o revezamento dos motoristas. O primeiro trecho da viagem corresponde a 40% de todo o trajeto e o segundo trecho, a 55% do restante. Calcule:

- a) A distância que é percorrida no primeiro trecho da viagem.
b) A distância que é percorrida no segundo trecho da viagem.
c) O tempo de percurso do terceiro trecho, caso o motorista mantenha uma velocidade média de 90 km/h.

8. Em uma loja, um aparelho de ar-condicionado custa R\$ 8.000,00 à vista.



- A potência de refrigeração dos aparelhos de ar condicionado é indicada em BTU, que significa Unidade Térmica Britânica. Essa especificação deve ser escolhida de acordo com o ambiente no qual o aparelho será instalado.

Vendido a prazo, o valor desse aparelho sofre um acréscimo de 8%, e o total é dividido em duas prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?

9. (UFPEL-RS) Uma raquete custa na loja A R\$15,00 mais caro que na loja B. O proprietário da loja A, percebendo a diferença, lança uma promoção oferecendo desconto de 10% para que o preço de sua mercadoria se torne o mesmo preço da loja B. Quanto custa a raquete na loja B?
10. (FGV-SP) Uma mercadoria, cujo preço de tabela é R\$ 8 000,00, é vendida à vista com desconto de $x\%$, ou em duas parcelas iguais de R\$ 4 000,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra. Suponha que o comprador dispõe do dinheiro necessário para pagar à vista e que ele sabe que a diferença entre o preço à vista e a primeira parcela pode ser aplicada no mercado financeiro a uma taxa de 25% ao mês. Nessas condições:
- a) se $x = 15$, será vantajosa para ele a compra a prazo? Explique.
 - b) Qual é o valor de x que torna indiferente comprar à vista ou a prazo? Explique.
11. (UFPR) Numa loja de automóveis usados, a comissão paga a cada um dos vendedores consiste num percentual sobre o total de vendas do vendedor mais um bônus por meta atingida, conforme a tabela abaixo:

Total de vendas no mês	Percentual sobre o total de vendas	Bônus por meta atingida
Até R\$ 80.000,00	0,8%	R\$ 0,00
Entre R\$ 80.000,00 e R\$ 200.000,00	1,0%	R\$ 600,00
Acima de R\$ 200.000,00	1,2%	R\$ 900,00

- a) Qual é a comissão paga a um vendedor que consegue vender R\$ 120.000,00 em um mês?
- b) Quanto um vendedor precisará vender em um mês para receber uma comissão de R\$ 3.900,00?
- c) Um dos vendedores apresentou uma reclamação ao gerente da loja porque havia recebido R\$ 1.000,00 de comissão. Explique por que esse valor está errado.

12. Uma mercadoria teve seu preço majorado em 18%. A pedido de um cliente, foi dado um desconto de 5% sobre o novo preço, passando a mercadoria a custar R\$ 302,50 a mais que seu preço inicial. Qual era o preço inicial dessa mercadoria?
13. Amélia fixou em 18% o lucro sobre o preço de custo de uma mercadoria que comprou para revender. Sabendo que o custo dessa mercadoria foi de R\$ 250,00, por quanto deverá ser revendida?
14. Certa mercadoria foi comprada por R\$ 860,00. Por quanto deve ser revendida para que o lucro seja de 20% sobre o preço de custo?
15. Um comerciante comprou dez sacas de batatas por R\$ 210,00. Por quanto ele deve revender cada saca para obter um lucro de 20% sobre o preço de venda?
16. (PUCCamp-SP) O preço pedido pelos 18 volumes da enciclopédia **Tesouro da Juventude** em um *sebo* é uma verdadeira "*pechincha*". Com os 17% de desconto já embutidos no preço, a enciclopédia toda pode ser comprada por R\$ 478,08. Supondo que cada volume tenha o mesmo preço, conclui-se que o preço que o sebo anunciou, por volume, antes do desconto, era de
- a) R\$ 28,00.
 - b) R\$ 26,00.
 - c) R\$ 38,00.
 - d) R\$ 36,00.
 - e) R\$ 32,00.
17. O preço de um produto em uma loja é R\$ 39,00. O dono da loja, mesmo pagando um imposto de 20% sobre o preço de venda, obtém lucro de 30% sobre o preço de custo. Qual é o preço de custo desse produto?
18. Qual é o preço de custo de um produto vendido por R\$ 240,00, sabendo que, na transação, o comerciante teve um lucro de 20% sobre a venda?
19. (Vunesp-SP) A diferença entre o preço de venda anunciado de uma mercadoria e o preço de custo é igual a R\$ 2 000,00. Se essa mercadoria for vendida com um desconto de 10% sobre o preço anunciado, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Determine seu preço de custo.