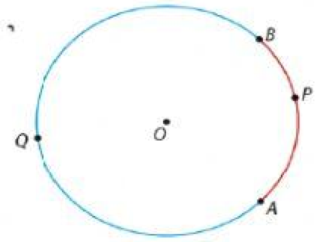
# • Razões trigonométricas na circunferência

## ➢ Arcos de circunferência

Ao marcarmos dois pontos *A* e *B* sobre uma circunferência de centro *O*, ela fica dividida em duas partes denominadas **arcos de circunferência** ou, simplesmente, **arcos**. Os pontos *A* e *B* são as extremidades dos arcos e, portanto, pertencem a ambos.

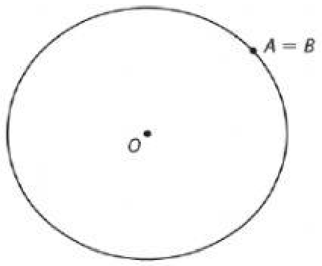



■ Arcos $\overset{\frown}{AB}$.

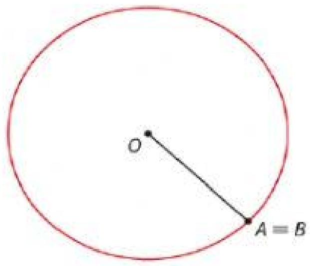
Os pontos *A* e *B* determinam dois arcos de circunferência que podem ser indicados por $\overset{\frown}{AB}$. Quando não ficar evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos inserir um ponto entre as extremidades *A* e *B* e utilizar a notação $\overset{\frown}{APB}$ ou $\overset{\frown}{AQB}$ para identificar cada arco.

Se as extremidades *A* e *B* coincidem, um dos arcos fica reduzido a um ponto e o outro é a própria circunferência. Eles são chamados, respectivamente, de **arco nulo** e de **arco de uma volta**.

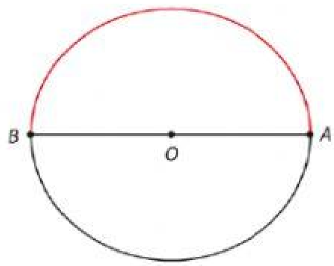
Quando as extremidades correspondem às extremidades de um diâmetro, teremos duas **semicircunferências** ou **arcos de meia-volta**.




■ Arco nulo.




■ Arco de uma volta.




■ Arcos de meia-volta ou semicircunferências.

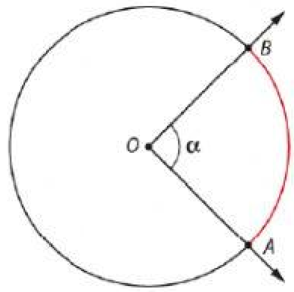
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

## ➢ Ângulo central

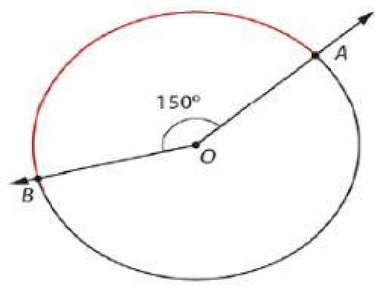
Todo ângulo que tem vértice no centro da circunferência é chamado de **ângulo central**. Assim, todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subtende.

Na figura ao lado, $A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$. Além disso, $\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = \alpha$.

Veja alguns exemplos a seguir.

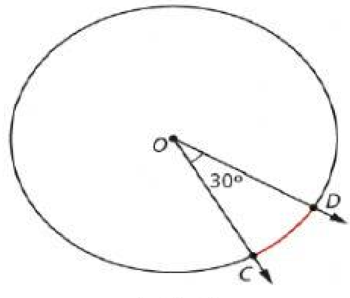



**a)** O ângulo central $A\hat{O}B$ indicado mede 150°.




■ $\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = 150°$

**b)** O ângulo central $C\hat{O}D$ indicado mede 30°.



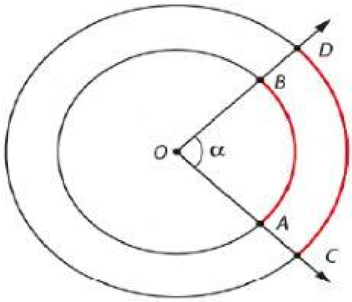

■ $\text{med}\left(C\hat{O}D\right) = 30°$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

## Medida e comprimento de arcos de circunferência

A medida angular de um arco é a medida do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura seguinte, a medida angular do arco $\widehat{AB}$ é igual a $\alpha$. Também podemos representá-la por $med\left(\widehat{AB}\right)$. Observe que a medida angular do arco $\widehat{CD}$ também é $\alpha$.



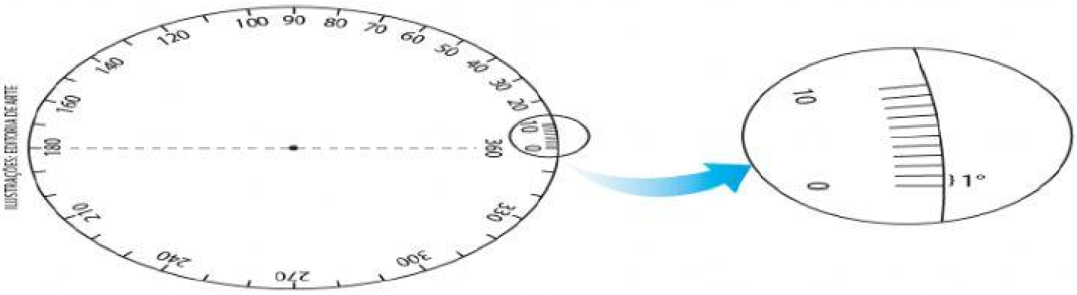

A medida linear de um arco é o comprimento ao longo do arco, ou seja, a medida de uma extremidade à outra.

## Unidades de medida de arcos de circunferência

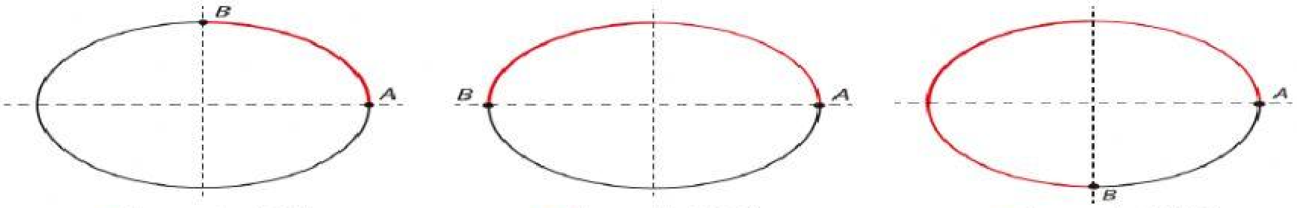
A medida de um arco de circunferência pode ser expressa em grau ou em radiano. Provavelmente, você já conheceu o grau no Ensino Fundamental. Vamos retomar algumas ideias relacionadas a ele e, em seguida, apresentar o radiano.

### Grau

Ao dividir uma circunferência em 360 partes iguais, cada parte obtida é um arco que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência e tem medida angular 1 **grau**, indicado por 1°. Assim, uma circunferência tem 360°.




Os arcos de 90°, 180° e 270°, marcados em sentido anti-horário nas figuras a seguir, representam um quarto, metade e três quartos da circunferência, respectivamente, pois $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$, $\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$ e $\frac{270°}{360°} = \frac{3}{4}$.




- Arco de 90°.
- Arco de 180°.
- Arco de 270°.

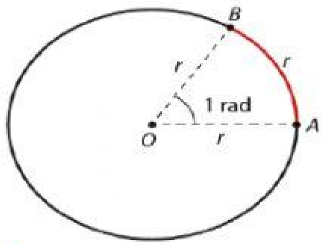
Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**, sendo que:

- um minuto (1') é igual a $\frac{1}{60}$ do grau;
- um segundo (1") é igual a $\frac{1}{60}$ do minuto.

## Radiano

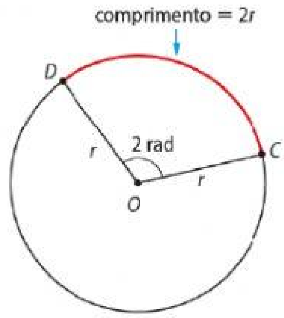
Agora, vamos conhecer outra unidade de medida angular: o radiano. Essa unidade será bastante utilizada ao longo do estudo de Trigonometria e também está presente no dia a dia de diversos profissionais, como engenheiros, físicos e arquitetos.

Quando o comprimento de um arco (a medida linear) é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém, dizemos que a medida angular desse arco é 1 **radiano** (1 rad).




- Comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ = comprimento do raio $\overline{OA} = r$.
- $\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 1$ rad.

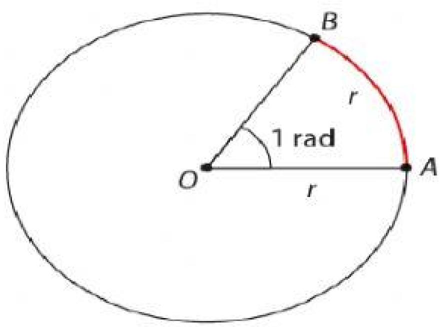
Observe o arco $\overset{\frown}{CD}$ ao lado. O comprimento do arco mede o dobro da medida do raio, então a medida angular do arco é 2 rad.




## Relação entre grau e radiano

Como fazer para converter um ângulo medido em grau para a sua equivalência em radiano? No Ensino Fundamental, você viu que o comprimento de uma circunferência de raio $r$ é dado por $2\pi r$. Agora, vamos usar essa informação para estabelecer a relação entre grau e radiano e fazer conversões entre as unidades de medida angular.

Dada uma circunferência de raio $r$, o seu comprimento $C$ é $C = 2\pi r$. Podemos interpretar essa expressão como o raio $r$ que "cabe" $2\pi$ vezes nesse comprimento, ou seja, aproximadamente 6,28 vezes.

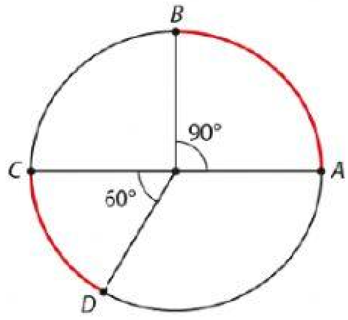



Como cada arco de comprimento igual a $r$ corresponde a um ângulo central de medida 1 rad, então o arco de comprimento $2\pi r$ (a circunferência toda) corresponde a um ângulo central de medida $2\pi$ rad. Sabemos que a circunferência tem 360°, então concluímos que:

$$\boxed{2\pi \text{ rad} = 360°}$$

A partir dessa relação, podemos escrever outras, por exemplo:

- $\pi$ rad = 180°
- $\frac{\pi}{2}$ rad = 90°
- $\frac{\pi}{4}$ rad = 45°




Utilizando uma regra de três e a relação $\pi$ rad = 180°, podemos converter em radiano qualquer medida angular expressa em grau e vice-versa. Por exemplo, para escrever 270° em radiano, fazemos:

$$\begin{array}{lcl} \pi \text{ rad} & \text{———} & 180° \\ x & \text{———} & 270° \end{array}$$

Então: $x = \frac{\pi \text{ rad} \cdot 270°}{180°} = \frac{3\pi}{2}$ rad

Logo, 270° equivalem a $\frac{3\pi}{2}$ radianos.

Acompanhe, agora, alguns exemplos para determinarmos o comprimento e a medida angular de alguns arcos.

Na circunferência de raio $r$ ao lado, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ medem, respectivamente, 90° e 60°. Vamos expressar essas medidas em radiano e também determinar o comprimento dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$.

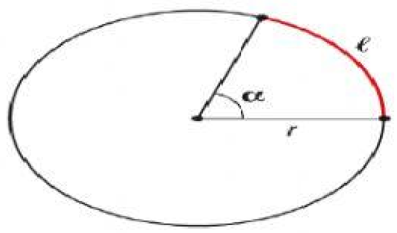
Como a circunferência tem 360°, o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é a quarta parte do comprimento da circunferência, e o comprimento do arco $\overset{\frown}{CD}$ é a sexta parte do comprimento da circunferência. Assim, para determinar o comprimento do arco, dividimos $2\pi r$ (comprimento da circunferência) por quatro e por seis, respectivamente, como indicado a seguir.

| | Ângulo (em grau) | Ângulo (em radiano) | Comprimento do arco |
|---|---|---|---|
| **Circunferência completa** | 360° | $2\pi$ | $2\pi r$ |
| **Arco $\overset{\frown}{AB}$** | 90° | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$ |
| **Arco $\overset{\frown}{CD}$** | 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{3}$ |

De modo geral, para calcular o comprimento $\ell$ de um arco de medida $\alpha$ em uma circunferência de raio $r$, usamos a regra de três e estabelecemos as seguintes relações:

- para $\alpha$ em grau

$$\begin{array}{lcl} \text{ângulo} & & \text{comprimento} \\ 360° & \text{———} & 2\pi r \\ \alpha & \text{———} & \ell \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \ell = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi r$$






- para $\alpha$ em radiano

$$\begin{array}{lcl} \text{ângulo} & & \text{comprimento} \\ 1 \text{ rad} & \text{———} & r \\ \alpha & \text{———} & \ell \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \ell = \alpha r$$

# > ATIVIDADES RESOLVIDAS



**1.** Expresse 22°30' em radiano.

**Resolução**

Primeiro, vamos transformar 22°30' em minuto: $22°30' = 22 \cdot 60' + 30' = 1320' + 30' = 1350'$

Agora, vamos transformar 180° em minuto: $180° = 180 \cdot 60' = 10\,800'$

Assim, podemos fazer a seguinte regra de três:

$$\left.\begin{array}{l} 10\,800' \text{ ——— } \pi \text{ rad} \\ 1350' \text{ ——— } x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10\,800}{1350} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow \frac{8}{1} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 8x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

Podemos resolver de outro modo. Acompanhe:

Seja $x$ a medida, em radiano, do arco correspondente a 22°30'. Como 30 minutos equivalem a meio grau, temos $22°30' = 22{,}5°$. Assim: $x = 22{,}5° \Rightarrow 2x = 45° \Rightarrow 4x = 90° \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2}$ rad $\Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$ rad

Logo, $22°30' = \frac{\pi}{8}$ rad.

**2.** Determine, em grau, a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 8h20.

**Resolução**

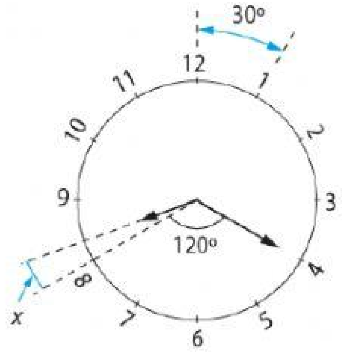



Seja $\alpha$ a medida do ângulo pedido e $x$ a medida do ângulo descrito pelo ponteiro das horas em 20 min a partir das 8 h. O mostrador do relógio é dividido em 12 arcos iguais. Por isso, o arco compreendido entre dois números consecutivos do relógio mede $\frac{360°}{12}$, ou seja, 30°. Assim, $\alpha = x + 120°$, já que 120° é o ângulo formado pelo arco com extremidade nos números 4 e 8 do relógio.

A cada 60 minutos o ponteiro das horas percorre 30°. Então, podemos fazer a seguinte relação:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{tempo (min)} & \text{ângulo (grau)} \\ 60 \text{ ——— } & 30 \\ 20 \text{ ——— } & x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{60}{20} = \frac{30}{x} \Rightarrow 3 = \frac{30}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ (medida em grau)}$$




$\alpha = x + 120° \Rightarrow \alpha = 10° + 120° \Rightarrow \alpha = 130°$

Portanto, o ângulo solicitado mede 130°.

## Exercícios

**1.** Expresse:

a) 60° em radiano;

b) 210° em radiano;

c) $\frac{10\pi}{9}$ rad em grau;

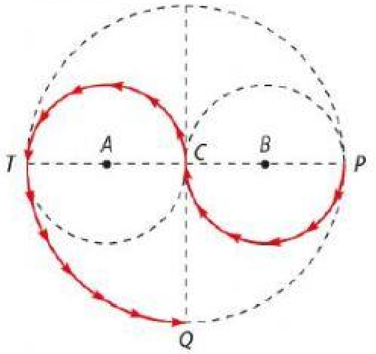
d) $\frac{\pi}{20}$ rad em grau.

**2.** Qual é, em radiano, a medida do arco descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio em um período de 25 minutos?

- Reúna-se a um colega e cada um deve explicar ao outro qual foi o raciocínio utilizado para resolver a atividade. Vocês resolveram da mesma maneira?

**3.** Em uma circunferência de 32 cm de diâmetro, marca-se um arco $\widehat{AB}$ de 8 cm de comprimento. Qual é a medida desse arco em radiano?

**4.** Na figura, têm-se três circunferências, de centros $A$, $B$ e $C$, tangentes duas a duas. As retas $\overleftrightarrow{QC}$ e $\overleftrightarrow{PT}$ são perpendiculares. Sendo 4 m o raio da circunferência maior, quantos metros devemos percorrer para ir de $P$ a $Q$, seguindo as flechas?

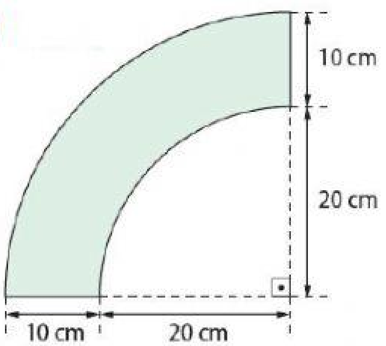



**5.** Luana é artesã e faz bordados em bastidor. Para estimar a quantidade de linha que usará na próxima encomenda, ela precisa saber algumas medidas do desenho bordado. Ajude Luana e determine o comprimento do contorno de cada detalhe indicado em azul nas imagens a seguir. Use $\pi \simeq 3{,}14$.

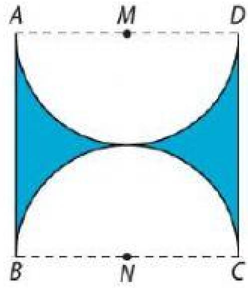
IRINA SOKOLOVSKAYA/SHUTTERSTOCK.COM

- O bastidor é essa peça que prende o tecido a ser bordado. Pode ser de madeira ou de outros materiais.

a)

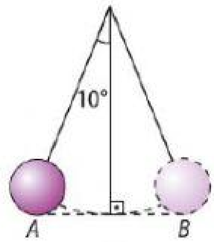



b) Para fazer esse detalhe, Luana desenhou um quadrado $ABCD$ de lado 10 cm. Em seguida, traçou as linhas curvas, que são semicircunferências com centros nos pontos médios, $M$ e $N$, dos lados do quadrado.



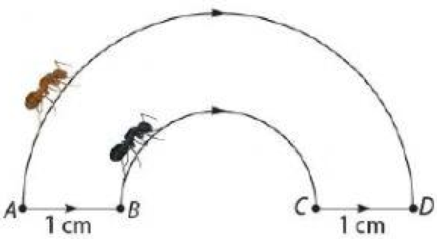

**6.** Você conhece o relógio de pêndulo? Ele foi criado pelo físico holandês Christian Huygens em 1656 a partir do princípio de funcionamento desenvolvido por Galileu Galilei. Uma das peças principais desse tipo de relógio é o pêndulo, responsável por manter o equipamento funcionando.

Suponha que o pêndulo de um relógio tenha comprimento 0,5 m e execute o movimento, de $A$ para $B$, indicado na figura.




Determine o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ que a extremidade do pêndulo descreve.

**7.** (OBMEP) Duas formigas partem do ponto $A$ e vão até o ponto $D$, andando no sentido indicado pelas flechas. A primeira percorre o semicírculo maior; a segunda, o segmento $\overline{AB}$, o semicírculo menor e o segmento $\overline{CD}$. Os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ estão alinhados e os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem 1 cm cada um. Quantos centímetros a segunda formiga andou menos que a primeira?




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) 2

b) $\pi$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\pi - 2$

e) $2\pi$