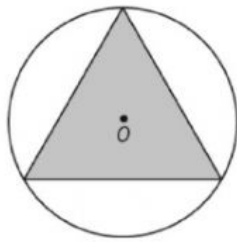
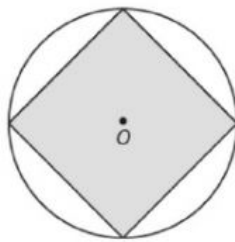


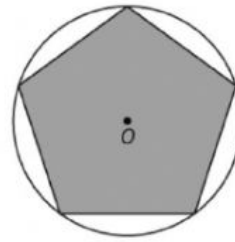
• Polígonos regulares



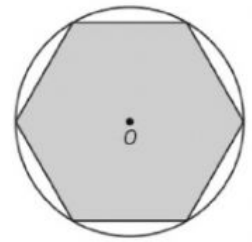
■ Triângulo equilátero inscrito.



■ Quadrado inscrito.



■ Pentágono inscrito.



■ Hexágono inscrito.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

➤ Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência

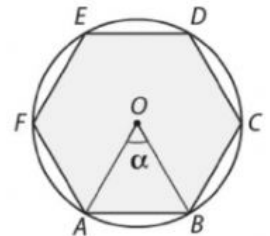
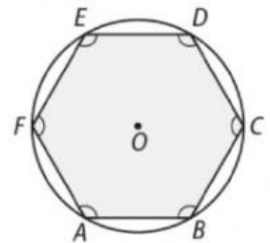
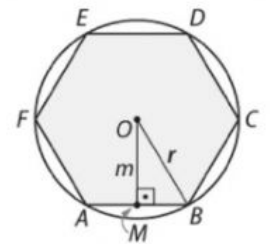
O centro O e o raio r da circunferência na qual o polígono regular está inscrito são denominados, respectivamente, **centro e raio do polígono**. A distância m do centro O até o ponto médio M de um lado do polígono regular denomina-se **apótema** do polígono.

Os ângulos cujos lados são dois lados consecutivos do polígono são chamados de **ângulos internos** do polígono. A medida de cada ângulo interno de um

polígono de n lados é dada por $\beta = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$

Um ângulo α cujo vértice está no centro da circunferência circunscrita ao polígono regular e cujos lados passam por dois vértices consecutivos desse polígono é chamado de **ângulo central** do polígono. A medida de um ângulo

central de um polígono regular é dada por $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.



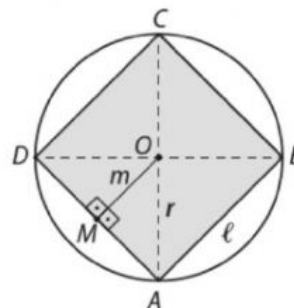
➤ Relações métricas nos polígonos Regulares Quadrado

Considere o quadrado $ABCD$, inscrito em uma circunferência de raio r , representado na figura. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AOD , temos:

$$\ell^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 2r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{2}$$

Assim:

$$\ell = r\sqrt{2}$$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O segmento de reta $\overline{OM}$ é congruente aos segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{MA}$.
Observe, na figura anterior, que:

$$m + m = \ell \Rightarrow 2m = \ell \Rightarrow m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Portanto:

$$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

➤ Hexágono regular

Considere o hexágono regular $ABCDEF$, inscrito em uma circunferência de raio r , representado na figura.
Observe que:

- $\text{med}(\widehat{FOA}) = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$
 - $\overline{OA} \cong \overline{OF}$ e $\widehat{OFA} \cong \widehat{OAF}$ (pois o triângulo OAF é isósceles)
- Assim, $\text{med}(\widehat{OFA}) = \text{med}(\widehat{OAF}) = 60^\circ$, pois $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ e podemos concluir que o triângulo OAF é equilátero.

Como AOF é um triângulo equilátero, então:

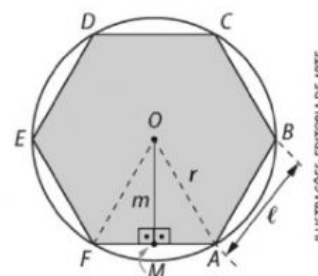
$$\ell = r$$

Como $\frac{FA}{2} = \frac{\ell}{2} = \frac{r}{2}$, então:

$$r^2 = m^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

➤ Triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero ABC , inscrito em uma circunferência de raio r , representado na figura.
Observe que $\overline{AD}$ é o lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência, então, pelo que vimos, $AD = r$. Dessa forma, pelo teorema de Pitágoras:

$$(BD)^2 = \ell^2 + (DA)^2 \Rightarrow (2r)^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow 4r^2 = \ell^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 3r^2 \Rightarrow \ell = r\sqrt{3}$$

Assim:

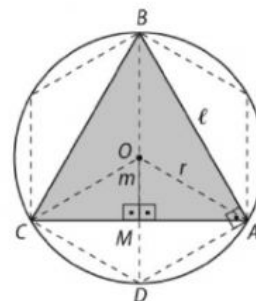
$$\ell = r\sqrt{3}$$

Agora, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMA , temos:

$$(OA)^2 = (OM)^2 + (MA)^2 \Rightarrow r^2 = m^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \Rightarrow m^2 = r^2 - \frac{r^2 \cdot 3}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow m = \frac{r}{2}$$

Portanto:

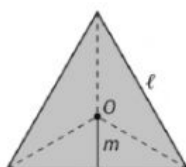
$$m = \frac{r}{2}$$



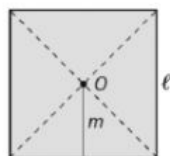
➤ Área de um polígono regular

Vamos considerar os polígonos regulares a seguir, em que:

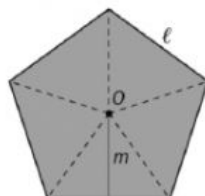
- ℓ é a medida do lado;
- m é a medida do apótema;
- O é o centro do polígono;
- $n \cdot \ell$ é a medida do perímetro ($2p$, em que p é a medida do semiperímetro do polígono).



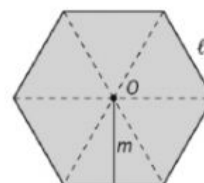
■ Triângulo equilátero.



■ Quadrado.



■ Pentágono regular.



■ Hexágono regular.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Unindo o centro O de um polígono regular de n lados a cada um dos seus vértices, esse polígono fica decomposto em n triângulos isósceles congruentes.

Como a medida da altura de cada um desses triângulos é igual à medida do apótema do polígono, a área de cada um desses polígonos é igual a n vezes a área

do triângulo formado: $A = \frac{(n \cdot \ell \cdot m)}{2}$.

Como $n\ell$ é a medida do perímetro do polígono, a área também pode ser expressa por:

$$A = \frac{2pm}{2} \Rightarrow A = p \cdot m$$

A área de um polígono regular de n lados é igual ao produto da medida p , do semiperímetro, pela medida m , do apótema.

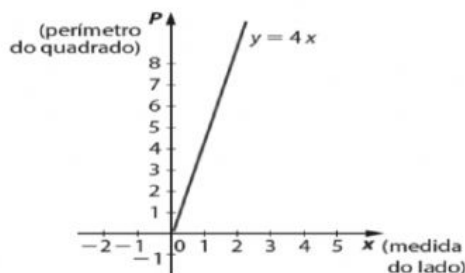
➤ Área e perímetro de um polígono regular em função da medida dos lados

Considere a situação a seguir.

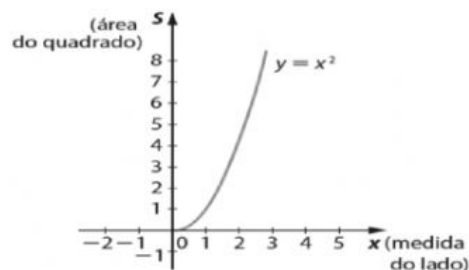
Para cercar um terreno quadrado de 4 metros de lado, Antônio usou 16 metros de arame. Seu cliente, satisfeito com o trabalho realizado, pediu que ele colocasse cerca em outro terreno, também quadrado, mas com o quádruplo da área do primeiro. Antônio ficou pensando se usaria, então, o quádruplo da metragem de arame. Para compreender melhor o problema, vamos relacionar o perímetro P e a área S de um quadrado, em função da medida x do seu lado:

x (em metro)	P (em metro)	S (em metro quadrado)
1	4	1
2	8	4
3	12	9
4	16	16
5	20	25
6	24	36
7	28	49
8	32	64
n	$4n$	n^2

Agora, vamos observar essas variações graficamente:



■ Variação do perímetro do quadrado em função da medida x do lado.



■ Variação da área do quadrado em função da medida x do lado.

ILUSTRAÇÕES EDITORIAIS DE ANTE

Para construir esses gráficos, consideramos apenas valores de $x > 0$, pois x representa a medida do lado do quadrado.

O perímetro P de um quadrado é diretamente proporcional à medida de seu lado e é modelado pela função afim dada por $P(x) = 4x$. Já a área S do quadrado, em função da medida x do lado, corresponde à função quadrática definida por $S(x) = x^2$.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 1 Determine a área S de um quadrado inscrito em uma circunferência de 5 dm de raio.

Resolução

Nesse caso, o lado do quadrado é dado por: $\ell = r\sqrt{2}$, ou seja, $\ell = 5\sqrt{2}$ dm.

Logo, $S = \ell^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$

Portanto, $S = 50 \text{ dm}^2$.

- 2 Determine a medida R do raio da circunferência inscrita no hexágono regular cujo lado mede 4 cm.

Resolução

A medida do raio da circunferência inscrita em um polígono regular é igual à medida do apótema desse polígono. Assim, $R = m$.

Para o hexágono regular, temos: $\ell = r$ e $m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, em que r é a medida do raio da circunferência circunscrita ao hexágono.

De acordo com o enunciado, temos $\ell = r = 4$ cm. Assim:

$$m = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Logo a medida R do raio da circunferência inscrita é $2\sqrt{3}$ cm.

- 3 Sabendo que uma circunferência tem 10 cm de raio, determine a medida do lado e a medida do apótema do hexágono regular nela inscrito.

Resolução

Como temos um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r , sabemos que $\ell = r$, e portanto, $\ell = 10$ cm.

Nessas condições a medida m do apótema do hexágono regular é dada por $m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $m = \frac{10\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $m = 5\sqrt{3}$ cm.

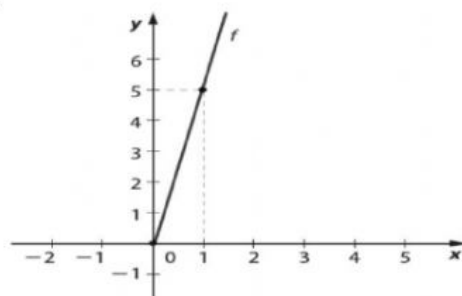
- 4 Observe o gráfico representado e faça o que se pede a seguir.

- a) Escreva a lei de formação da função representada.
b) Considerando que essa função representa a variação do perímetro P de um polígono regular em função da medida do seu lado, identifique esse polígono, justificando.

Resolução

- a) Conhecemos dois pares ordenados do gráfico: $(0, 0)$ e $(1, 5)$. Como se trata de uma reta, tem-se que $f(x) = ax + b$. Como a função passa por $(0, 0)$, $b = 0$. Assim, $f(x) = ax$. Para $x = 1$, $y = 5$. Logo, $a = 5$. Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = 5x$, com $x > 0$.

- b) A lei da função é $f(x) = 5x$. Isso quer dizer que, para uma medida x do lado desse polígono, o perímetro é $5x$. Como se trata de um polígono regular, todos os lados têm mesma medida, então concluímos que esse polígono é um pentágono regular.

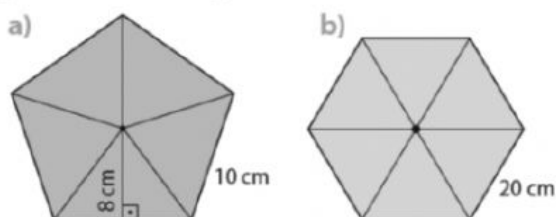


Exercícios

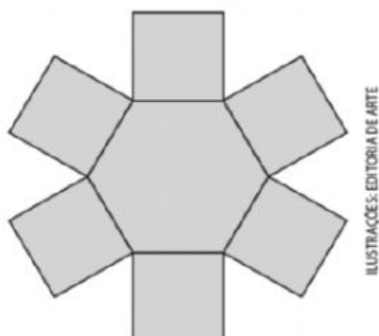
- 1 Dado um triângulo equilátero, cujo lado mede 6 cm, calcule:
- o raio da circunferência circunscrita;
 - a medida do apótema.

- 2 Na circunferência de raio 2 cm está inscrito um hexágono regular. Qual é a área desse polígono?
(Adote $\sqrt{3} \approx 1,73$)

- 3 Calcule as áreas dos polígonos regulares representados a seguir.



- 4 A figura a seguir foi recortada de uma cartolina e é formada por um hexágono regular e seis quadrados. Cada lado do hexágono mede 10 cm.

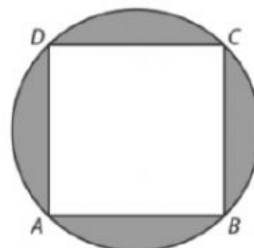


Considerando $\sqrt{3} \approx 1,73$, quantos centímetros quadrados de cartolina foram usados para fazer a figura?

- 5 Calcule a área de um triângulo equilátero, sabendo que seu apótema mede 3 cm.
- 6 São dados dois quadrados: um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência. Determine a razão entre:
- o perímetro do quadrado inscrito e o do quadrado circunscrito;
 - a área do quadrado inscrito e a do quadrado circunscrito.

- 7 O apótema de um hexágono regular mede $6\sqrt{3}$ cm. Nessas condições, determine:
- a medida do seu lado;
 - sua área.

- 8 Na figura a seguir, o quadrado $ABCD$ está inscrito em uma circunferência. Sabendo que o lado desse quadrado mede a , expresse, em função de a , a área da região sombreada.

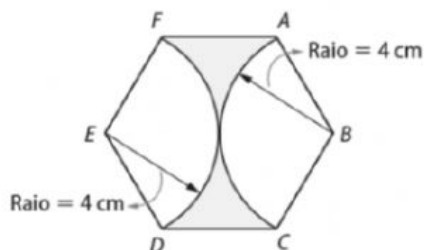


- 9 Observe a relação entre a medida dos lados e o perímetro de um polígono regular. Identifique qual é esse polígono regular e justifique sua resposta.

Medida do lado	2	3	4	5
Medida do perímetro	20	30	40	50

- 10 Considerando os estudos sobre a variação da área e do perímetro de um polígono regular em função da medida do lado, elabore um problema e resolva-o. Depois troque-o com um de seus colegas e resolva o problema proposto por ele. Em seguida, discutam as soluções, verificando se chegaram às mesmas conclusões e quais procedimentos utilizaram.

- 11 (Ence-RJ) A figura abaixo representa um hexágono regular.



Calcule:

- a medida do seu apótema;
- a área da região colorida de verde.

- 12 Calcule a área de um hexágono regular cujo lado mede 6 cm.

- 13 (UEL-PR) Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a "Estrela de David" (Figura 1).



Figura 1



Figura 2

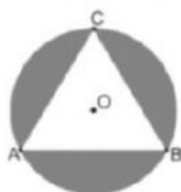


Figura 3

A partir das Figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na Figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na Figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e um triângulo equilátero (ABC), inscrito nessa circunferência.

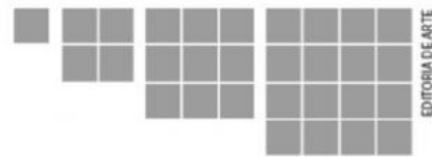
Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir.

- Determine a medida do lado do triângulo ABC. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.
- Determine a área representada pela cor cinza na Figura 3. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

- 14 Em algumas cidades, serão construídas praças na forma de octógono regular. Para isso, foi elaborado um projeto, em que consta a medida m do lado do octógono, uma vez que o comprimento do lado poderia variar conforme o local para a construção da praça.

- Faça um esboço do polígono regular que representa a praça.
- Qual a função que relaciona o perímetro P e a medida do lado m do octógono regular?
- Construa o gráfico que representa essa função.

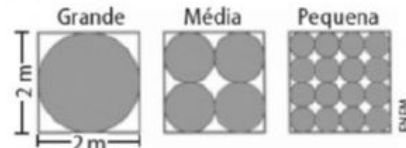
- 15 Observe a sequência de figuras abaixo, formadas por quadrados alaranjados congruentes:



Considere a medida do lado de um quadrado como sendo 1 unidade de comprimento (u.c.), e a área desse quadrado como 1 unidade de área (u.a.), e copie o quadro a seguir no seu caderno, completando-o.

Medida do lado (em u.c.)	1	2	3	4	5
Medida do perímetro (em u.c.)	4	8			
Medida da área (em u.a.)	1	4			

- 16 (Enem/MEC) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



Área do círculo: πr^2

As sobras de material de produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

- a entidade I recebe mais material do que a entidade II;
- a entidade I recebe metade do material da entidade III;
- a entidade II recebe o dobro de material da entidade III;
- as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III;
- as três entidades recebem iguais quantidades de material.