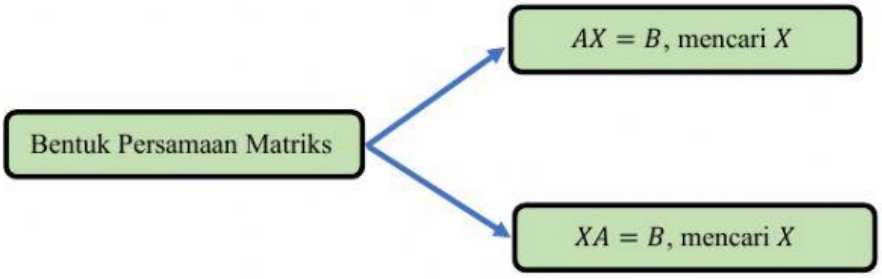
LKPD-06
MATRIKS

A. Simak video berikut

B. Menentukan penyelesaian persamaan matriks



Penyelesaiannya:

$AX = B$

$\Leftrightarrow A^{-1}.AX = A^{-1}.B$

$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow IX = A^{-1}.B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}.B$

$XA = B$

$\Leftrightarrow XA.A^{-1} = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow XI = BA^{-1}$

$\Leftrightarrow X = BA^{-1}$

LIVEWORKSHEETS

C. Penggunaan Matriks

Menyelesaikan permasalahan dengan menerapkan konsep matriks. Perhatikan permasalahan berikut.

Permasalahan 1:

Dua kali umur Doni ditambah umur ayahnya sekarang adalah 66 tahun. Tiga tahun yang lalu, selisih umur ayahnya dengan tiga kali umur Doni adalah 7 tahun. Berapakah masing-masing umur Doni dan umur ayah sekarang?

Penyelesaian dengan menerapkan konsep matriks.

Misalkan:

x adalah umur ayah sekarang

y adalah umur Doni sekarang

(1) $2y + x = 66 \Leftrightarrow x + 2y = 66$

(2) $x - 3 - 3(y - 3) = 7 \Leftrightarrow x - 3y - 3 + 9 = 7 \Leftrightarrow x - 3y = 1$

Diperoleh SPLDV:

$$\begin{cases} x + 2y = 66 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

SPLDV tersebut dapat dinyatakan dalam perkalian matriks.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sebelumnya, kalian telah mempelajarinya dengan menyelesaikan dengan elimininasi dan atau substitusi. Sekarang kalian dapat menyelesaikannya dengan menerapkan konsep matriks. Yaitu dengan 1) **Determinan matriks** atau 2) **Invers matriks.**

Cara 1: Determinan Matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1.(-3) - 1.2 = -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 66 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 66.(-3) - 1.2 = -198 - 2 = -200$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 66 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 1.66 = 1 - 66 = -65$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-200}{-5} = 40$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-65}{-5} = 13$$

Jadi umur ayah sekarang adalah 40 tahun dan umur Doni sekarang adalah 13 tahun.

D_x diperoleh dari matriks koefisien, dimana kolom 1 diganti dengan matriks hasil.

D_y diperoleh dari matriks koefisien, dimana kolom 2 diganti dengan matriks hasil.

LIVEWORKSHEETS

Cara 2: Invers Matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A X B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1.(-3) - 1.2 = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj\ A = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh persamaan matriks:

$AX = B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 66 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 66 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 200 \\ 65 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 40 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 13 \end{pmatrix}$

Diperoleh $x = 40$ dan $y = 3$

Jadi umur ayah sekarang adalah 40 tahun dan umur Doni sekarang adalah 13 tahun.

Selanjutnya:

<u>Permasalahan 2:</u>

Harga 2 kg mangga, 1 kg jeruk, dan 1 kg apel adalah Rp51.000,00. Harga 1 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 1 kg apel adalah Rp54.000,00. Harga 2 kg jeruk dan 3 kg apel adalah Rp80.000,00. Jika ibu membeli 1 kg jeruk dan 2 kg apel, maka ia harus membayar sebesar …

<u>Penyelesaian dengan menerapkan konsep matriks.</u>

Misalkan:

x adalah harga 1 kg mangga

y adalah harga 1 kg jeruk

z adalah harga 1 kg apel

(1) $2x + y + z = 51.000$

(2) $x + 2y + z = 54.000$

(3) $2y + 3z = 80.000$

Pertanyaan:

$y + 2z = \cdots$

LIVEWORKSHEETS

Diperoleh SPLTV:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 51.000 \\ x + 2y + z = 54.000 \\ 2y + 3z = 80.000 \end{cases}$$

SPLTV tersebut dapat dinyatakan dalam perkalian matriks.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51.000 \\ 54.000 \\ 80.000 \end{pmatrix}$$

Cara 1: Determinan Matriks

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51.000 \\ 54.000 \\ 80.000 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$= 2.2.3 + 1.1.0 + 1.1.2 - 0.2.1 - 2.1.2 - 3.1.1$$

$$= 12 + 0 + 2 - 0 - 4 - 3$$

$$= 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 51.000 & 1 & 1 \\ 54.000 & 2 & 1 \\ 80.000 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 51.000 & 1 & 1 & 51.000 & 1 \\ 54.000 & 2 & 1 & 54.000 & 2 \\ 80.000 & 2 & 3 & 80.000 & 2 \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$= (51.000).2.3 + 1.1.(80.000) + 1.(54.000).2 - (80.000).2.1 - 2.1.(51.000) - 3.(54.000).1$$

$$= 306.000 + 80.000 + 108.000 - 160.000 - 102.000 - 162.000$$

$$= 70.000$$

LIVEWORKSHEETS

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 51.000 & 1 \\ 1 & 54.000 & 1 \\ 0 & 80.000 & 3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 51.000 & 1 \\ 1 & 54.000 & 1 \\ 0 & 80.000 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 51.000 \\ 1 & 54.000 \\ 0 & 80.000 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= 2.(54.000).3 + (51.000).1.0 + 1.1.(80.000)$$

$$- 0.(54.000).1 - (80.000).1.2 - 3.1.(51.000)$$

$$= 324.000 + 0 + 80.000 - 0 - 160.000 - 153.000$$

$$= 91.000$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 51.000 \\ 1 & 2 & 54.000 \\ 0 & 2 & 80.000 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 51.000 \\ 1 & 2 & 54.000 \\ 0 & 2 & 80.000 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= 2.2.(80.000) + 1.(54.000).0 + (51.000).1.2$$

$$- 0.2.(51.000) - 2.(54.000).2 + (80.000).1.1$$

$$= 320.000 + 0 + 102.000 - 0 - 216.000 \quad 80.000$$

$$= 126.000$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{70.000}{7} = 10.000$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{91.000}{7} = 13.000$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{126.000}{7} = 18.000$$

$y + 2z = 13.000 + 2(18.000) = 49.000$

Jadi untuk membeli 1 kg jeruk dan 2 kg apel, ibu harus membayar Rp49.000,00.

LIVEWORKSHEETS

Cara lain: Invers Matriks

Diperoleh SPLTV:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 51.000 \\ x + 2y + z = 54.000 \\ 2y + 3z = 80.000 \end{cases}$$

SPLTV tersebut dapat dinyatakan dalam perkalian matriks.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51.000 \\ 54.000 \\ 80.000 \end{pmatrix}$$

Cara 2: Invers Matriks

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51.000 \\ 54.000 \\ 80.000 \end{pmatrix}$$

A X B

$AX = B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= 2.2.3 + 1.1.0 + 1.1.2 - 0.2.1 - 2.1.2 - 3.1.1$$

$$= 12 + 0 + 2 - 0 - 4 - 3$$

$$= 7$$

Lanjut cari *adjoin* matriks A

LIVEWORKSHEETS

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +(6-2) & -(3-0) & +(2-0) \\ -(3-2) & +(6-0) & -(4-0) \\ +(1-2) & -(2-1) & +(4-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Adj\ A = K^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$AX = B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{|A|}(Adj\ A).B$

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 51.000 \\ 54.000 \\ 80.000 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \frac{1.000}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 51 \\ 54 \\ 80 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 70.000 \\ 91.000 \\ 126.000 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 13.000 \\ 18.000 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 13.000 \\ 18.000 \end{pmatrix}$

Diperoleh $x = 10.000$, $y = 13.000$, dan $y = 18.000$

$y + 2z = 13.000 + 2(18.000) = 49.000$

Jadi untuk membeli 1 kg jeruk dan 2 kg apel, ibu harus membayar Rp49.000,00.

LIVEWORKSHEETS

Latihan Soal.

1. Saat ini jumlah usia Alan dan Beni adalah 24 tahun. Dua tahun yang lalu usia Beni dikurangi usia Alan adalah 4 tahun. Jika x menyatakan usia Alan saat ini dan y menyatakan usia Beni saat ini, maka perkalian matriks yang sesuai dengan permasalahan tersebut adalah….

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \end{pmatrix}$

   B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix}$

   D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$

   E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix}$

2. Sebuah perusahaan ingin membangun kompleks perumahan. Rumah-rumah tersebut direncanakan berukuran tipe 45, 60, dan 80. Banyak rumah yang akan dibangun 150 unit. Rumah tipe 45 sebanyak 20 unit lebih banyak dari rumah tipe 60. Rumah tipe 80 sebanyak 10 kurang dari jumlah tipe 60. Diketahui x menyatakan banyak rumah tipe 45 yang dibangun, y menyatakan banyak rumh tipe 60 yang dibangun, dan z menyatakan banyak rumah tipe 80 yang dibangun. Perkalian matriks yang menyatakan hubungan antara tipe rumah dan banyak rumah yang dibangun adalah ….

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

   B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

   D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

   E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

3. Kios Pak Johan menyediakan buah mangga, pir, dan anggur. Harga 1 kg mangga Rp2.000,00 kurang dari harga 1 kg pir. Harga 2 kg pir dan 3 kg anggur adalah Rp138.000,00. Harga 3 kg mangga, 3 kg pir, dan 5 kg anggur adalah Rp264.000,00. Model matematika yang menyatakan hubungan antara berat dan harga buah adalah ….

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 138.000 \\ 264.000 \end{pmatrix}$

   B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.000 \\ 138.000 \\ 264.000 \end{pmatrix}$

LIVEWORKSHEETS

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.000 \\ 138.000 \\ 264.000 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.000 \\ 138.000 \\ 264.000 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.000 \\ 138.000 \\ 264.000 \end{pmatrix}$

4. Banyak siswa laki-laki yang berasa di dalam kelas adalah $\frac{2}{5}$ dari banyak siswa perempuan. Jika 12 orang siswa perempuan meninggalkan kelas itu, banyak siswa perempuan dan laki-laki mejadi sama. Jika x dan y berturut-turut menyatakan banyak siswa laki-laki dan perempuan, matriks yang tepat untuk menyatakan banyak masing-masing siswa adalah ….

A. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. Empat tahun yang lalu, jumlah usia Eli dan Febri adalah 16 tahun. Sekarang Eli 4 tahun lebih muda daripada Febri. Umur Eli sekarang dinyatakan dengan x dan umur Febri sekarang dinyatakan dengan y. Untuk menentukan x dan y dapat dinyatakan dengan perkalian matriks sebagai berikut.

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \end{pmatrix}$

---Selamat Belajar dengan Penguatan Matriks---

LIVEWORKSHEETS