

➤ Conjunto dos números irracionais

O **conjunto dos números irracionais**, que indicamos por $\mathbb{I}$, é o conjunto formado pelos números que têm uma representação decimal infinita e não periódica.

Veja outros exemplos de números irracionais e suas primeiras casas decimais, obtidas com o auxílio de uma calculadora científica:

$$\sqrt{13} = 3,60555127... \quad \sqrt[3]{5} = 1,70997594... \quad \pi = 3,14159265...$$

A respeito dos números irracionais, é possível demonstrar que:

- as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos são números irracionais. Exemplos:

$$\sqrt{10} = 3,16227766... \quad \sqrt{24} = 4,89897948...$$

- em particular, as raízes quadradas de números primos positivos são números irracionais. Exemplos:

$$\sqrt{3} = 1,732050807... \quad \sqrt{7} = 2,645751311... \quad \sqrt{61} = 7,810249675...$$

- a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional. Exemplos:

$$3 + \sqrt{2} = 3 + 1,41421356... = 4,41421356...$$

$$\sqrt{5} + 1,5 = 2,23606797... + 1,5 = 3,73606797...$$

- o resultado da subtração de um número racional e um número irracional, e vice-versa, é um número irracional. Exemplos:

$$1 - \pi = 1 - 3,14159265... = -2,14159265...$$

$$\sqrt{6} - 4 = 2,44948974... - 4 = -1,55051025...$$

- o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional. Exemplos:

$$2 \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7} = \sqrt{28} = 5,29150262...$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \pi = -\frac{\pi}{3} = 1,04719755...$$

➤ Alguns números irracionais famosos

O número pi (π)

O número representado pela letra grega π (pi) é um dos números irracionais mais conhecidos no meio matemático. O **número π** é a constante obtida da razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro. Por ser um número irracional, a representação decimal de π é infinita e não periódica: $\pi = 3,141592653...$.

O número de Euler (e)

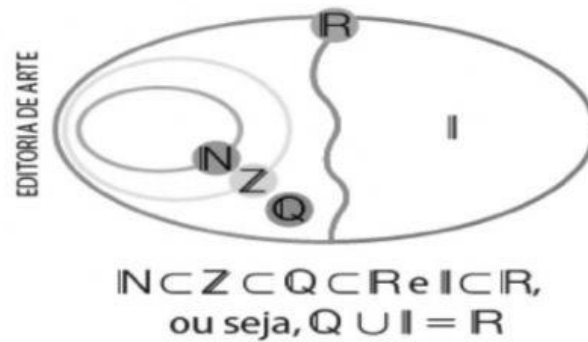
O número irracional e , chamado de **número de Euler**, cujo valor é 2,718281..., tem diversas aplicações dentro da Matemática, bem como em outras ciências como Economia, Biologia e Estatística. Esse número irracional também é chamado de número de Napier, graças aos estudos relacionados aos logaritmos feitos pelo matemático John Napier (1550-1617).

A razão áurea

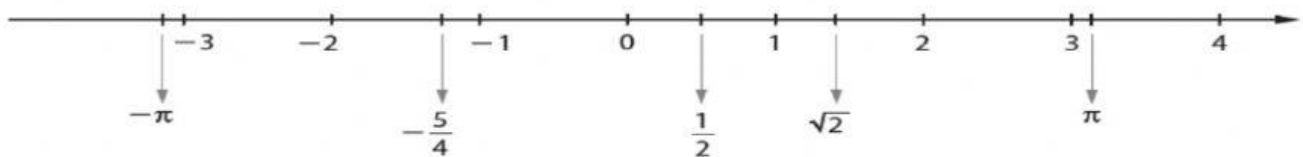
Essa razão é conhecida como **razão áurea**, e o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cujo valor é 1,618033..., é chamado de **número de ouro**, representado pela letra grega maiúscula ϕ (lê-se: fi).

➤ Conjunto dos números reais

Reunindo os números racionais aos números irracionais, formamos o **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.



Já vimos como marcar, na reta orientada, pontos que representam números racionais. Vimos também que os números racionais não são suficientes para preencher toda a reta orientada. É possível marcar pontos na reta que representam números irracionais. Observe alguns números racionais e irracionais representados na reta orientada:



A respeito dos números reais:

- A soma de dois números reais é um número real.
- A diferença de dois números reais é um número real.
- O produto de dois números reais é um número real.
- O quociente de dois números reais, sendo o divisor diferente de zero, é um número real.
- Os conceitos de números opostos e de números inversos vistos nos conjuntos numéricos anteriores também são válidos para os números reais.

Exemplos:

- O oposto de $\sqrt{2}$ é $-\sqrt{2}$, pois $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.
- O inverso de π é $\frac{1}{\pi}$, pois $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$.

No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, destacamos os seguintes subconjuntos:

- números reais não nulos: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
- números reais não negativos: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- números reais não positivos: $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
- números reais positivos: $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- números reais negativos: $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

➤ Intervalos reais

Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$, chamados de **intervalos reais**, que são determinados por desigualdades. Os intervalos podem ser representados de diversas maneiras, como veremos a seguir.

Dados dois números reais a e b , chamados de **extremos do intervalo**, com $a < b$, temos:

Intervalo aberto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a, b[$$



Intervalo fechado

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$$



Intervalos semiabertos

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b[$$

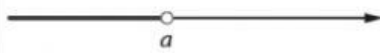


$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a, b]$$

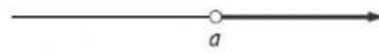


Intervalos ilimitados

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty, a[$$



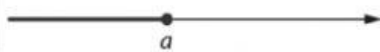
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =]a, +\infty[$$



$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$



$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} =]-\infty, a]$$



$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty[$$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observações:

- A bolinha vazia ($\circ$) indica que os extremos não pertencem ao intervalo.
- A bolinha cheia ($\bullet$) indica que os extremos pertencem ao intervalo.
- O símbolo $+\infty$ lê-se "mais infinito".
- O símbolo $-\infty$ lê-se "menos infinito".
- Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, são apenas símbolos usados na notação de intervalos ilimitados.

Veja alguns exemplos de intervalos reais a seguir.

a) $[-4, 3[$ ← Essa representação é a notação de conjuntos.

$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 3\}$ ← Essa representação é a notação de conjuntos.



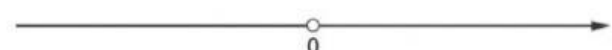
b) $]-\infty, -2]$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$$



c) $]0, +\infty[$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$



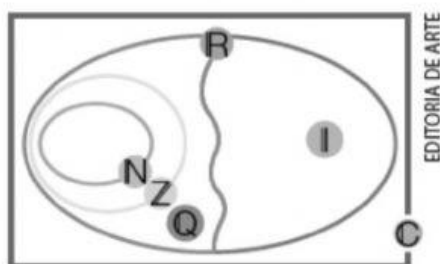
➤ Conjunto dos números complexos

Por volta do ano 1500, o pensamento corrente era o de que não existia raiz quadrada de número negativo. Por exemplo, ao se depararem com a equação $x^2 - 18x + 82 = 0$, os estudiosos da época simplesmente diziam que ela não podia ser resolvida, pois os cálculos levam a determinar o valor de $\sqrt{-4}$.

Anos mais tarde, no século XVIII, uma notação para esses números foi desenvolvida; o matemático Leonhard Euler (1707-1783) usou em seus trabalhos a letra i , denominada **unidade imaginária**, para indicar a raiz quadrada de -1 . Essa notação se perpetuou ao longo do tempo e é utilizada até hoje. Assim, definimos:

$$i^2 = -1$$

Com o desenvolvimento dos conceitos acerca da unidade imaginária i , que compõe os números complexos, foi necessário estender os conjuntos numéricos conhecidos, dando origem ao **conjunto dos números complexos**, representado por $\mathbb{C}$.



➤ Forma algébrica de um número complexo

Número complexo é todo número da forma $z = a + bi$, denominada **forma algébrica**, sendo a e b números reais e i a unidade imaginária.

Desse modo, o conjunto dos números complexos pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i \text{ é a unidade imaginária}\}$$

Em $z = a + bi$, a é denominado a **parte real** de z e b é a **parte imaginária**. Indicamos:

$$\text{Re}(z) = a \text{ e } \text{Im}(z) = b$$

Se a parte imaginária do número complexo z é nula ($b = 0$), então o número z é um número **real**.

$$z = a + 0i \Rightarrow z = a \longleftarrow z \text{ é um número real}$$

Como $z = a + 0i$ é um número real, podemos indicar qualquer x real por $x + 0i$. Portanto, o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, ou seja, $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Se a parte real do número complexo z é nula ($a = 0$) e a parte imaginária é diferente de zero ($b \neq 0$), então o número z é **imaginário puro**.

$$z = 0 + bi \Rightarrow z = bi \longleftarrow z \text{ é um número imaginário puro}$$

Observe os exemplos a seguir.

- a) Se $z = -4 - i\sqrt{3}$, então $\text{Re}(z) = -4$ e $\text{Im}(z) = -\sqrt{3}$.
- b) Se $z = \frac{2i}{5}$, então $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = \frac{2}{5}$; logo, z é um número imaginário puro.
- c) Se $z = 3,7i$, então $\text{Re}(z) = 3,7i$ e $\text{Im}(z) = 0$; logo, z é um número real.
- d) Se $z = 0$, então $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) = 0$; logo, z é um número real.

A respeito dos números complexos:

- Todo número complexo $z = a + bi$ pode ser representado pelo par ordenado (a, b) .
- Em $\mathbb{C}$ **não** é definida a relação de ordem, isto é, um número complexo não real não é maior nem menor do que outro complexo.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 1 Considere o retângulo ao lado. Determine a área, o perímetro e a diagonal do retângulo $ABCD$. As medidas obtidas são números irracionais?

Resolução

Vamos calcular a área A do retângulo dada pelo produto da medida da base pela medida da altura:

$$A = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

A medida da área do retângulo é irracional, pois o produto de um número racional (não nulo) por um número irracional é um número irracional.

O perímetro P do retângulo é dado pela soma das medidas de seus lados:

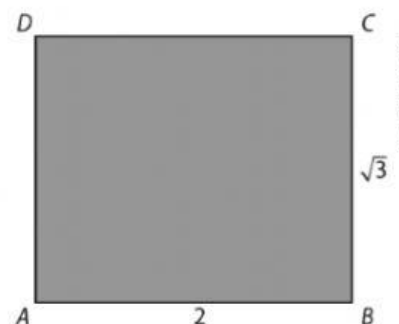
$$P = 2 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \Rightarrow P = 4 + 2\sqrt{3}$$

A medida do perímetro do retângulo é irracional, pois a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Para determinarmos a medida da diagonal d do retângulo, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo ABD :

$$d^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow d^2 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow d = \sqrt{7}$$

A medida da diagonal do retângulo é irracional, pois a raiz quadrada de um número primo positivo é um número irracional.



- 2 Se $A =]2, 5[$ e $B = [3, 8[$, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

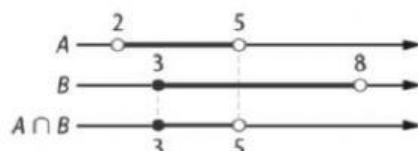
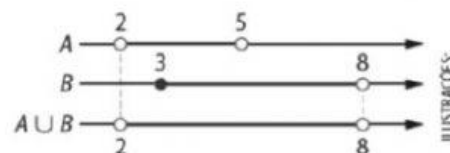
Resolução

As operações de união e intersecção com intervalos reais funcionam da mesma maneira que as operações de união e intersecção com conjuntos estudadas anteriormente neste Capítulo. No caso dos intervalos, é interessante começar pela análise dos extremos.

Assim, a união dos intervalos A e B é dada por:

Para a intersecção, também vamos analisar os extremos dos intervalos. Observe que 3 é elemento de A e também de B ; e 5 é elemento de B e não é elemento de A .

Os elementos de 3 até 5, excluído este último, pertencem a A e a B . Logo:

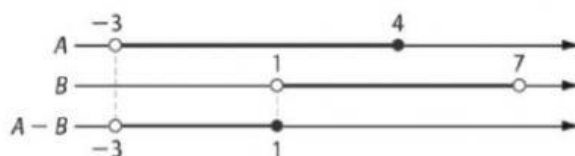


Assim, temos: $A \cup B =]2, 8[$ e $A \cap B = [3, 5[$.

- 3 Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 7\}$, calcule $A - B$.

Resolução

O conjunto $A - B$ é formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B .



Observe que o número 1 pertence ao conjunto A , mas não pertence ao conjunto B ; portanto, ele pertence ao conjunto $A - B$.

A diferença dos conjuntos é $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 1\}$.

- 4 Considerando o número complexo $z = (m - 3) + (n^2 - 25)i$, determine m e n de modo que z seja:

- um número real;
- um número imaginário puro.

Resolução

Para realizar a atividade, inicialmente, precisamos identificar a parte real e a parte imaginária do número complexo z . Assim:

$$\operatorname{Re}(z) = m - 3$$

$$\operatorname{Im}(z) = n^2 - 25$$

- a) Para que z seja real, devemos ter $\operatorname{Im}(z) = 0$:

$$n^2 - 25 = 0 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5 \text{ ou } n = -5$$

$$(m - 3) \in \mathbb{R} \Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

- b) Para que z seja imaginário puro, devemos ter $\operatorname{Re}(z) = 0$ e $\operatorname{Im}(z) \neq 0$:

$$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$n^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow n \neq 5 \text{ e } n \neq -5$$

1 Determine os elementos dos conjuntos abaixo:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 4x - 4 = 0\}$

b) $B = \{y \in \mathbb{I} \mid y^2 - 7 = 0\}$

c) $C = \left\{a \in \mathbb{N} \mid \frac{2}{a} + a = 3\right\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3 + x^2 = 4\}$

e) $E = \{y \in \mathbb{Q} \mid y^2 - y - 1 = 0\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 4 = 0\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 6x + 13 = 0\}$

2 Sendo $\sqrt{3} \approx 1,732$, calcule um valor aproximado de:

a) $\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$

b) $\frac{2\sqrt{3} - 1}{4}$

3 Sejam a e b números irracionais quaisquer. As seguintes afirmações são FALSAS:

a) $a \cdot b$ sempre é um número irracional;

b) $a + b$ sempre é um número irracional.

Em cada caso, dê um exemplo que indica que as afirmações são falsas.

4 Assinale a afirmação verdadeira:

a) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ é irracional e $0,999\dots$ é racional.

b) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ é racional e $0,999\dots$ é racional.

c) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ é racional e $0,999\dots$ é irracional.

d) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ é irracional e $0,999\dots$ é irracional.

e) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$ e $0,999\dots$ não são números reais.

5 Usando a notação de conjuntos, escreva os intervalos a seguir.

a) $[6, 10]$

b) $] -1, 5]$

c) $] -6, 0[$

d) $[0, +\infty[$

e) $] -\infty, 3[$

6 Represente, na reta real, os intervalos a seguir.

a) $[2, 8]$

b) $] -\infty, 2]$

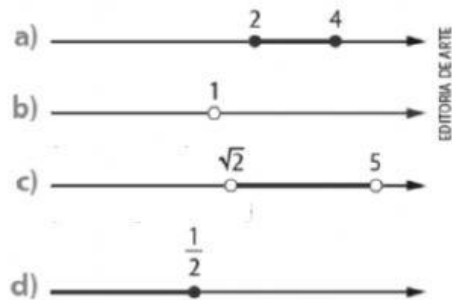
c) $[-6, -1[$

d) $[2, +\infty[$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

7 Usando a notação de conjuntos, escreva os intervalos a seguir, que estão representados na reta real.



8 Determine $A \cup B$ em cada caso a seguir.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 2\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

9 Dados os conjuntos $A = [-1, 6[$; $B =]-4, 2]$; $E =]-2, 4[$, calcule:

a) $(B \cup E) - A$

b) $E - (A \cap B)$

10 Determine k , de modo que o número complexo $z = (k + 5) - 4i$ seja imaginário puro.

11 Determine m para que o número complexo $z = 1 + (m^2 - 81)i$ seja um número real.

12 Considere o número complexo $z = (2x - 6) + (y + 7)i$. Determine os números reais x e y , tais que $z = 0$.

13 Divida o número 16 em duas partes cujo produto seja 70.