

MATEMÁTICA

V SECUNDARIA

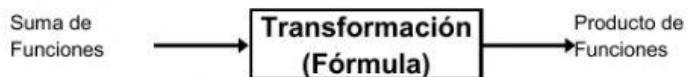
Ficha 10: Transformaciones trigonométricas I (de una suma o diferencia a producto)

En ocasiones se nos presentan ejercicios en las que se nos pide reducir o simplificar, por ejemplo:

$$E = (\operatorname{Sen} 40^\circ + \operatorname{Sen} 20^\circ) \operatorname{Sec} 10^\circ$$

Observamos quizás la necesidad de pasar $\frac{\operatorname{Sen}(40^\circ + \operatorname{Sen} 20^\circ)}{\operatorname{Suma de Funciones}}$ a un producto de funciones

debe decir:



Esto puede lograrse mediante el uso **correcto** de las siguientes identidades:

$$\text{I. } \operatorname{Sen} A + \operatorname{Sen} B = 2 \operatorname{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\text{II. } \operatorname{Sen} A - \operatorname{Sen} B = 2 \operatorname{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\text{III. } \operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} B = 2 \operatorname{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\text{IV. } \operatorname{Cos} A - \operatorname{Cos} B = -2 \operatorname{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Para **demostrar** la primera identidad recordamos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{Sen} \alpha \operatorname{Cos} \beta + \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sen} \beta \\ \operatorname{Sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{Sen} \alpha \operatorname{Cos} \beta - \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sen} \beta \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Sumando} \\ \text{miembro a miembro} \end{array}$$

Se obtiene:

$$\operatorname{Sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{Sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{Sen} \alpha \operatorname{Cos} \beta \dots\dots\dots (*)$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\alpha + \beta = A$$

$$\alpha - \beta = B$$

Obtenemos:

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \quad \wedge \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

Reemplazamos en (*) se tiene:

$$\operatorname{Sen}A + \operatorname{Sen}B = 2\operatorname{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Los demás se demuestran en forma análoga.

Entonces en nuestro ejemplo:

$$\underbrace{(\operatorname{Sen}40^\circ + \operatorname{Sen}20^\circ)}_{\text{Usamos la identidad}} \operatorname{Sec}10^\circ$$

Usamos la identidad

$$2\operatorname{Sen}\left(\frac{40^\circ + 20^\circ}{2}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{40^\circ - 20^\circ}{2}\right) \operatorname{Sec}10^\circ$$

$$\begin{array}{c} 2 \operatorname{Sen}30^\circ \operatorname{Cos}10^\circ \operatorname{Sec}10^\circ \\ \downarrow \\ 2\left(\frac{1}{2}\right).1 \end{array}$$

Por identidad recíproca

$$\boxed{E = 1}$$

Practicando en clase

1. Reduce: $E = \operatorname{Sen}70^\circ + \operatorname{Sen}20^\circ$

- | | |
|--|--|
| a) $\sqrt{2}$ | b) $\sqrt{2} \operatorname{Sen}25^\circ$ |
| c) $\sqrt{2} \operatorname{Cos}25^\circ$ | d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| e) $-\sqrt{2}$ | |

2. Reduce:

$$E = (\operatorname{Cos}70^\circ + \operatorname{Cos}50^\circ) \operatorname{Sec}10^\circ$$

- | | | |
|--------|--------|------|
| a) 1 | b) 1/2 | c) 2 |
| d) 3/2 | e) 1/3 | |

3. Reduce:

$$E = (\operatorname{Sen}70^\circ + \operatorname{Cos}70^\circ) \operatorname{Sec}25^\circ$$

- | | | |
|------------------|---------------|-------------------------|
| a) 1 | b) $\sqrt{2}$ | c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| d) $\frac{1}{2}$ | e) 2 | |

4. Simplifica:

$$E = \frac{\operatorname{Sen}40^\circ - \operatorname{Sen}20^\circ}{\operatorname{Cos}80^\circ}$$

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|---------------|
| a) 1 | b) 2 | c) $\sqrt{3}$ |
| d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | |

5. Simplifica:

$$E = \frac{\operatorname{Sen}7x + \operatorname{Sen}3x}{\operatorname{Cos}7x + \operatorname{Cos}3x}$$

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) Tgx | b) $\operatorname{Tg}2x$ | c) $\operatorname{Tg}3x$ |
| d) $\operatorname{Tg}4x$ | e) $\operatorname{Tg}5x$ | |

6. Simplifica:

$$E = \frac{\operatorname{Sen}3x - \operatorname{Sen}x}{\operatorname{Cos}3x + \operatorname{Cos}x}$$

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) Tgx | b) $\operatorname{Ctg}x$ | c) $\operatorname{Tg}2x$ |
| d) $\operatorname{Ctg}2x$ | e) 2 | |

7. Simplifica:

$$E = \frac{\operatorname{Cos}x - \operatorname{Cos}3x}{\operatorname{Sen}2x}$$

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $\operatorname{Sen}x$ | b) $-\operatorname{Sen}x$ | c) $2\operatorname{Sen}x$ |
| d) $-2\operatorname{Sen}x$ | e) $\operatorname{Cos}2x$ | |

8. Reduce:

$$E = \frac{\operatorname{Sen}70^\circ + \operatorname{Sen}10^\circ}{\operatorname{Cos}10^\circ - \operatorname{Cos}70^\circ}$$

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $\sqrt{3}$ | b) $-\sqrt{3}$ | c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | |

9. Simplifica:

$$E = \frac{\operatorname{Cos}100^\circ + \operatorname{Cos}20^\circ + \operatorname{Cos}40^\circ}{\operatorname{Cos}50^\circ + \operatorname{Cos}30^\circ}$$

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $\operatorname{Sen}10^\circ$ | b) $\operatorname{Cos}10^\circ$ | c) $\operatorname{Csc}10^\circ$ |
| d) $\operatorname{Sec}10^\circ$ | e) $\operatorname{Ctg}10^\circ$ | |

10. Calcula:

$$E = \cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$$

- | | | |
|--------------------|-------|--------------------|
| a) 0 | b) 1 | c) $\sin 10^\circ$ |
| d) $\cos 10^\circ$ | e) -1 | |

11. Simplifica:

$$E = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$$

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) $\tan x$ | b) $\tan 2x$ | c) $\tan 3x$ |
| d) $\tan 4x$ | e) $\tan 5x$ | |

12. Reduce:

$$E = \frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x}$$

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) $\tan 2x$ | b) $\tan 3x$ | c) $\tan 4x$ |
| d) $\tan 5x$ | e) $\tan 6x$ | |

13. Reduce:

$$E = \frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 3x \cos x}$$

- | | | |
|------|------|------|
| a) 1 | b) 2 | c) 3 |
| d) 4 | e) 5 | |

14. Reduce:

$$\frac{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ}$$

- | | | |
|----------------------|--------------------|------|
| a) 1 | b) 1/2 | c) 2 |
| d) $2 \sin 10^\circ$ | e) $\cos 10^\circ$ | |

15. Reduce:

$$E = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{2 \cos 4x \cos x}$$

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a) 1 | b) 2 | c) $\sin x$ |
| d) $\tan x$ | e) $\cot x$ | |

16. Reduce:

$$E = \frac{\operatorname{Sen}17^\circ - \operatorname{Sen}3^\circ}{2\operatorname{Sen}7^\circ\operatorname{Sen}10^\circ}$$

- a) 1
- b) 2
- c) $\operatorname{Tg}10^\circ$
- d) $\operatorname{Ctg}10^\circ$
- e) $\operatorname{Tg}3^\circ$