UNIT PEMBELAJARAN 3

TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi pada unit ini Anda diharapkan dapat

1. Menjelaskan aturan sinus yang berlaku pada segitiga sebarang
2. Menjelaskan aturan kosinus yang berlaku pada segitiga sebarang
3. Menentukan solusi dari masalah yang berkaitan dengan aturan sinus
4. Menentukan solusi dari masalah yang berkaitan dengan aturan kosinus
5. Menentukan solusi dari masalah kontekstual yang berkaitan dengan aturan sinus
6. Menentukan solusi dari masalah kontekstual yang berkaitan dengan aturan kosinus

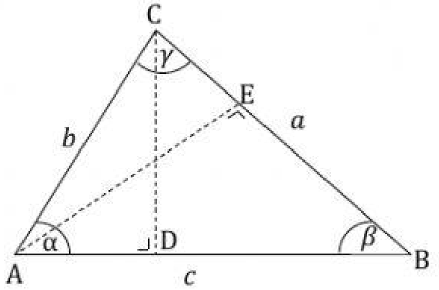
PROBLEMS CORNER

Pada pembahasan sebelumnya, kita sudah menentukan unsur-unsur serta rasio trigonometri pada segitiga siku-siku. Lalu bagaimana jika disajikan satu permasalahan trigonometri pada segitiga sembarang bersudut tumpul dan lancip ? Pada pembahasan subbab ini, akan dibahas bagaimana menentukan unsur-unsur pada segitiga sembarang.

Untuk menentukan unsur-unsur dalam segitiga sembarang digunakan rumus sinus atau rumus kosinus. Rumus sinus sering disebut **dalil sinus** atau **aturan sinus**. Begitu juga dengan rumus kosinus sering disebut **dalil kosinus** atau **aturan kosinus**. Pada pembahasan kali ini, akan ditentukan aturan sinus dan kosinus pada segitiga sembarang yang bersudut lancip dan bersudut tumpul.

A. ATURAN SINUS

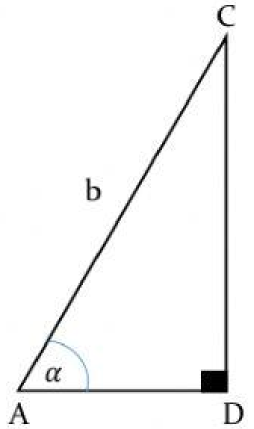
Perhatikan gambar berikut ini. Diketahui sebuah segitiga ABC lancip dengan panjang sisi-sisi BC, CA, dan AB beruturut-turut adalah a, b, dan c satuan panjang dan besar sudut dihadapan sisi-sisi itu berturut-turut adalah α , β , γ .



Petunjuk

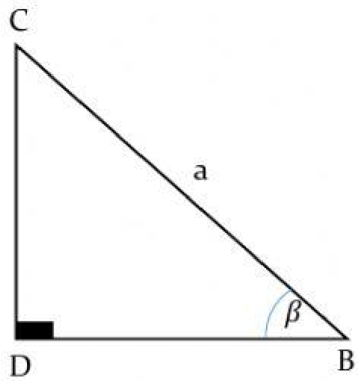
*Dikarenakan kita akan mencari dan membuktikan hubungan unsur-unsur segitiga sembarang pada aturan sinus, maka gunakan rasio (perbandingan) sinus pada segitiga siku-siku yang telah dipelajari pada unit pembelajaran sebelumnya.

Perhatikan segitiga ACD



$$\sin\alpha = \frac{sisi\ depan}{sisi\ miring} = \frac{CD}{AC}$$
$$\sin\alpha = \frac{CD}{b}$$
$$\boldsymbol{CD = b \times \sin\alpha} \ \dots\dots\dots\dots (\mathbf{1})$$

Perhatikan segitiga BCD



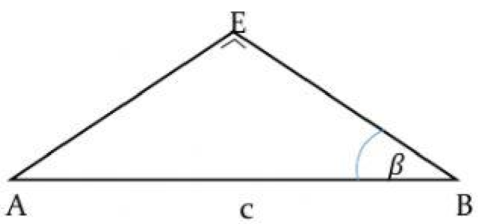
$$\sin\beta = \frac{sisi\ depan}{sisi\ miring} = \frac{CD}{CB}$$
$$\sin\beta = \frac{CD}{a}$$
$$\boldsymbol{CD = a \times \sin\beta} \ \dots\dots\dots\dots (\mathbf{2})$$

Persamaan (1)=(2) , maka diperoleh

$b \times \sin\alpha = a \times \sin\beta$

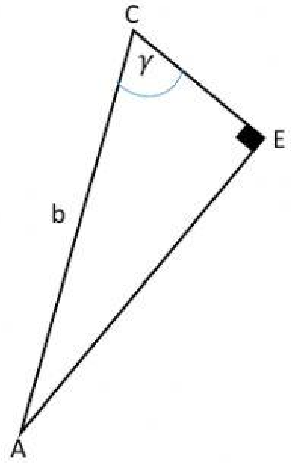
$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}} \quad \dots\dots\dots\dots (\mathbf{3})$$

Perhatikan segitiga ABE



$$\sin\beta = \frac{sisi\ depan}{sisi\ miring} = \frac{AE}{AB}$$
$$\sin\beta = \frac{AE}{c}$$
$$\boldsymbol{AE = c \times \sin\beta} \ \dots\dots\dots\dots (\mathbf{4})$$

Perhatikan segitiga CAE



$$\sin\gamma = \frac{sisi\ depan}{sisi\ miring} = \frac{AE}{AC}$$
$$\sin\gamma = \frac{AE}{b}$$
$$\boldsymbol{AE = b \times \sin\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{5})$$

Perhatikan persamaan (4)=(5), maka diperoleh

$c \times \sin\beta = b \times \sin\gamma$

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\gamma}} \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{6})$$

Persamaan (3)=(6) , maka dapat disimpulkan bahwa

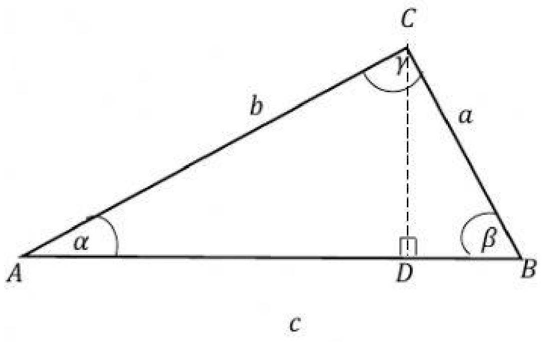
$$\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\gamma}}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa. Jika diketahui sebuah segitiga sembarang ABC dengan panjang sisi-sisi BC, AC, dan AB berturut-turut adalah a, b, dan c satuan panjang dan besar sudut di hadapan sisi-sisi itu berturut-turut adalah α , β , γ. Maka berlaku aturan sinus sebagai berikut.

ATURAN SINUS
$\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\gamma}}$

B. ATURAN KOSINUS

Perhatikan gambar berikut ini. Diketahui sebuah segitiga ABC lancip dengan panjang sisi-sisi BC, CA, dan AB beruturut-turut adalah a, b, dan c satuan panjang dan besar sudut dihadapan sisi-sisi itu berturut-turut adalah α, β, γ .



Petunjuk

*Dikarenakan kita akan mencari dan membuktikan hubungan unsur-unsur segitiga sembarang pada aturan kosinus, maka gunakan rasio (perbandingan) kosinus pada segitiga siku-siku yang telah dipelajari pada unit pembelajaran sebelumnya.

Jika dimisalkan garis $\mathrm{CD} = h$ merupakan garis tinggi pada sisi c. Kemudian $\mathrm{AD} = \mathrm{c} - x$ dan $\mathrm{DB} = x$. Perhatikan segitiga BCD. Dengan menggunakan teorema Phytagoras Pada segitiga siku-siku BCD, maka diperoleh.

$\mathrm{CB}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2$

$a^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Perhatikan segitiga ACD. Pada segitiga siku-siku ACD, diperoleh

$$\mathbf{\sin A = \frac{sisi\ depan}{hipotunesa} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{b}}$$

Sehingga , $\mathbf{CD = \sin A \times b \ldots\ldots\ldots\ldots (2)}$

Perhatikan kembali, bahwa

$$\mathbf{\cos A = \frac{sisi\ samping}{hipotunesa} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{b}}$$

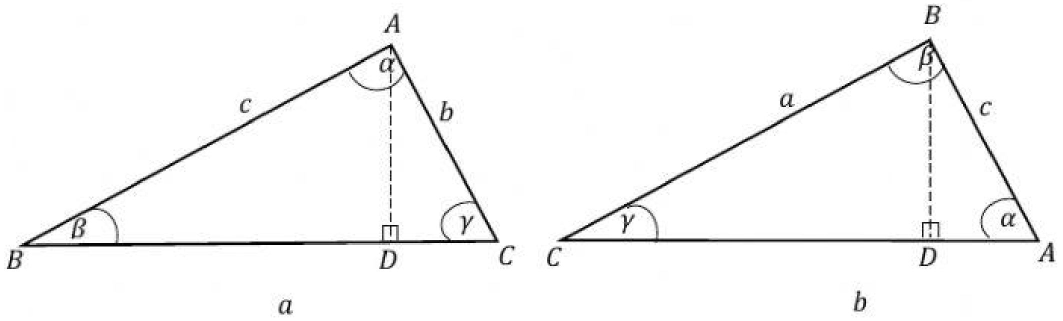
Sehingga, $\mathbf{AD = \cos A \times b \ldots\ldots\ldots\ldots (3)}$
Maka, $\mathbf{BD = AB - AD = c - b \cos A \ldots\ldots\ldots\ldots (4)}$

Substitusi persamaan (2) dan persamaan (4) ke persamaan (1). Sehingga didapat

$a^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2$
$a^2 = (\sin A \ \times b)^2 + (\mathrm{c} - (\mathrm{b} \times \cos A))^2$
$a^2 = (\sin^2\mathrm{A} \ \times \mathrm{b}^2) + \mathrm{c}^2 - 2\mathrm{bc} \cos \mathrm{A} + (\mathrm{b}^2 \times \cos^2\mathrm{A})$
$a^2 = \mathrm{b}^2(\sin^2\mathrm{A} + \cos^2\mathrm{A}) + \mathrm{c}^2 - 2\mathrm{bc} \cos \mathrm{A}$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A}} \text{ atau } \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

Perhatikan gambar (a) dan gambar (b) berikut ini.



(a) (b)

Dengan menggunakan analisis perhitungan yang sama dengan segitiga ABC, maka dari gambar (a) dan (b) berturut-turut diperoleh.

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma}$$

Secara umum, dalam setiap segitiga ABC dengan panjang sisi-sisi BC, AC, dan AB berturut-turut adalah a , b, dan c satuan panjang dan besar sudut di hadapan sisi-sisi itu berturut-turut adalah α , β , γ. Maka berlaku aturan kosinus sebagai berikut.

ATURAN KOSINUS
$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha}$
$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta}$
$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma}$

Aturan kosinus dapat digunakan untuk menentukan panjang sisi jika diketahui panjang dua sisi dan besar salah satu sudut. Aturan kosinus juga dapat digunakan untuk menentukan besar sudut segitiga jika diketahui panjang ketiga sisinya. Oleh karena itu, aturan kosinus juga dapat disajikan dalam bentuk berikut.

ATURAN KOSINUS
$\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$
$\boldsymbol{\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$
$\boldsymbol{\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$

CONTOH SOAL

1. Pada segitiga ABC diketahui a+b = 10 , sudut A = 30^0 , dan sudut B = 45^0 . Panjang sisi b adalah ?

   Jawab

   Langkah 1

   Masalah pada soal tersebut adalah

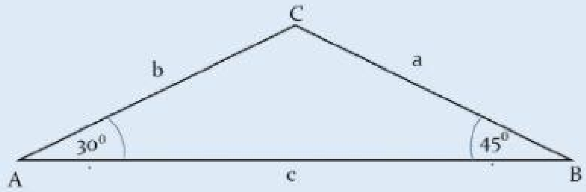
   untuk dapat mencari sisi b, maka nilai dari sisi a pada segitiga tersebut harus diketahui. Namun pada soal, tidak terdapat satu sisipun yang diketahui nilainya

   Langkah 2

   Diketahui pada soal bahwa jumah sisi $a + b = 10$ dengan $\angle A = 30^\circ$ dan $\angle B = 45^\circ$ Tetapi tidak diketahui berapa nilai masing-masing sisi a dan sisi b tersebut.

   Langkah 3

   Untuk memudahkan angkah pengerjaan, kita dapat mensketsa terlebih dahulu segitiga ABC sebagi berikut.



   Dikarenakan segitiga yang disajikan merupakan segitiga sembarang, maka kita dapat menggunakan aturan sinus atau aturan kosinus untuk menyelesaikan permasalahan ini.

   Perhatikan kembali bahwa, pada soal tidak ada satupun sisi yang nilainya diketahui, maka kita dapat menggunakan aturan sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

   Untuk menyelesaikan soal ini dengan mengubah $a + b = 10 \Leftrightarrow a = 10 - b$

   Langkah 4

   $a = 10 - b$, maka jika disubstitusikan kedalam aturan sinus menjadi

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10 - b)}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10 - b)}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

CONTOH SOAL

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(10-\mathrm{b}) = \frac{1}{2}\mathrm{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{b} + \frac{1}{2}\mathrm{b} = 5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{b}\left(\sqrt{2}+1\right) = 5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{b} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{b} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \times \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{b} = 20 - 10\sqrt{2} = 10(2-\sqrt{2})$$

Langkah 5
Panjang sisi b yang didapat adalah $10(2-\sqrt{2})$.

Dari soal yang kita ketahui bahwa
$a = 10 - b$
$a = 10 - \left(20 - 10\sqrt{2}\right)$
$a = 10\sqrt{2} - 10$

Jika kita substitusikan nilai a dan nilai b yang didapat kedalam $a + b = 10$ maka
$a + b = 10$

$10\sqrt{2} - 10 + 20 - 10\sqrt{2} = 10$

$10 = 10$ **(TERBUKTI)**

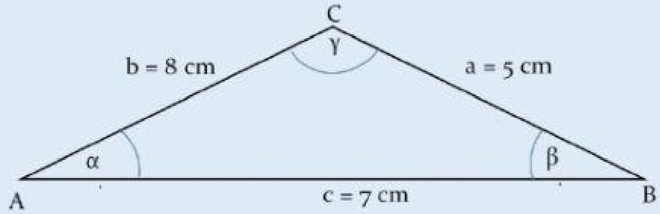
2. Diketahui segitiga ABC dengan AB = 7 cm , AC = 8 cm , dan BC = 5 cm . Berapakah besar sudut-sudut sgeitiga tersebut ?
Jawab

Langkah 1
Pada soal hanya diketahui ketiga sisi dari segitiga sembarang ABC. Dikarenakan segitiga yang disajikan dalam soal adalag segitiga sembarang, maka kita tidak dapat menggunakan rasio trigonometri pada segitiga siku-siku untuk menyelesaikannya.

CONTOH SOAL

Langkah 2
Diketahui nilai sisi sebuah segitiga sembarang ABC dengan Ab = 7 cm , AC = 8 cm , BC = 5 cm. Namun pada soal tidak ada satupun sudut yang diketahui.

Langkah 3
Akankita skesta terlebih dahulu segitiga sembarang ABC sebagai berikut.



Dikarenakan soal yang ditanyakan adalah segitiga sembarang, maka kita tidak dapat menggunakan rasio trigonometri pada segitiga siku-siku. Kita dapat menggunakan aturan sinus atau aturan kosinus untuk menyelesaikan soal ini.

Untuk mencari sudut pada segitiga ABC,
Aturan sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Aturan kosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

Langkah 4
Perhatikan bahwa pada aturan sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Setidaknya kita harus mengetahui nilai salah satu sudut trigonometri tersebut sehingga kita dapat menentukan sudut melalui rasio pada aturan sinus. Sehingga pada soal ini kita tidak dapat menggunakan aturan sinus untuk mencari besar sudut pada segitiga sembarang ABC.

Perhatikan bahwa pada aturan kosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

$$5^2 = 8^2 + 7^2 - 2(8)(7)\ \cos\alpha$$

$$112\cos\alpha = 8^2 + 7^2 - 5^2$$

$$\cos\alpha = 0.7857$$

$$\alpha = 38.21°$$

CONTOH SOAL

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta \\
8^2 &= 5^2 + 7^2 - 2(5)(7)\ \cos\beta \\
70\cos\beta &= 5^2 + 7^2 - 8^2 \\
\cos\beta &= 0.1429 \\
\beta &= 81.79^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma \\
7^2 &= 5^2 + 8^2 - 2(5)(8)\ \cos\gamma \\
80\cos\gamma &= 5^2 + 8^2 - 7^2 \\
\cos\gamma &= 0.5 \\
\gamma &= 60^\circ
\end{aligned}
$$

Atau dengan cara lain kita dapat menentukan besar sudut γ dengan cara
$\gamma = 180^\circ - (38.21^\circ + 81.79^\circ) = 60^\circ$

Langkah 5

Untuk mengetahui apakah sudut yang kita cari telah sesuai, maka kita dapat menjumlahkan seluruh sudut yang didapat sebagai berikut.
$\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = (38.21^\circ) + (81.79^\circ) + 60^\circ = 180^\circ$

REFLEKSI

Aturan Sinus dan Aturan Kosinus

Aturan Sinus dan Aturan Kosinus dapat kita gunakan untuk segitiga sembarang dikarenakan rasio trigonometri siku-siku tidak dapat digunakan pada segitiga sembarang.

BERIKAN TANDA CENTANG JIKA TELAH MENYELESAIKAN MATERI INI