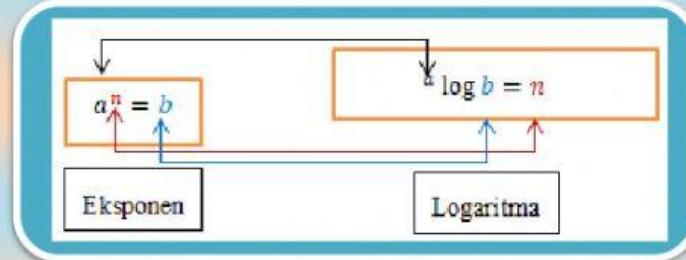


LOGARITMA

Logaritma adalah kebalikan atau invers dari suatu eksponen, dimana eksponen sendiri adalah suatu bentuk perkalian dengan bilangan yang sama kemudian diulang-ulang atau yang kenal dengan bilangan berpangkat. Bentuk umum dari eksponen adalah $a^n = b$, karena logaritma invers dari eksponen maka dapat dinyatakan sebagai berikut:



Dengan syarat $a \neq 1$, $a > 0$ dan $b > 0$, serta $a \log b$ dapat dibaca "logaritma b dengan bilangan pokok a ".

Contoh:

Sifat-sifat Logaritma:

A. Logaritma dari perpangkatan

Untuk $a \neq 1$, $a > 0$ dan $b > 0$

1. $a \log a^n = n$, itu karena $a \log a = 1$

Contoh:

Tentukan $6 \log 6$.

Pembahasan:

$$6 \log 6 = 1 \leftrightarrow 6^1 = 6$$

2. $a \log 1 = 0$

Contoh:

Tentukan nilai n dari ${}^{25} \log n = 0$

Pembahasan:

$${}^{25} \log n = 0 \leftrightarrow 25^0 = 1$$

$$3. \quad {}^a \log b^n = \frac{1}{n} \cdot {}^a \log b$$

Contoh:

Tentukan ${}^{27} \log 3$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^{27} \log 3 &= {}^{3^3} \log 3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot {}^3 \log 3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$4. \quad {}^a \log b^m = \frac{m}{n} \cdot {}^a \log b$$

Contoh:

Tentukan ${}^4 \log 8$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^4 \log 8 &= {}^{2^2} \log 2^3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot {}^2 \log 2 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

B. Logaritma dengan perkalian

Dengan $a \neq 1$, $a > 0$ dan $b > 0$ serta $c > 0$

$$5. \quad {}^a \log(b \cdot c) = {}^a \log b + {}^a \log c$$

Contoh:

Tentukan ${}^3 \log 15$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^3 \log 15 &= {}^3 \log 3.5 \\ &= {}^3 \log 3 + {}^3 \log 5 \\ &= 1 + {}^3 \log 5 \end{aligned}$$

C. Logaritma dengan pembagian

Dengan $a \neq 1$, $a > 0$ dan $b > 0$ serta $c > 0$

$$6. \quad {}^a \log \frac{b}{c} = {}^a \log b - {}^a \log c$$

Contoh:

Tentukan ${}^5 \log \frac{125}{5}$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^5 \log \frac{125}{5} &= {}^5 \log 125 - {}^5 \log 5 \\ &= {}^5 \log 5^3 - {}^5 \log 5 \\ &= 3 \cdot {}^5 \log 5 - {}^5 \log 5 \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

D. Mengubah basis logaritma

7. ${}^b \log c = \frac{{}^a \log c}{{}^a \log b}$ dengan $a \neq 1, a > 0, b \neq 1, b > 0$, dan $c > 0$

Contoh:

Jika ${}^3 \log 5 = a$ dan ${}^5 \log 4 = b$, tentukan ${}^4 \log 20$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^4 \log 20 &= \frac{{}^5 \log 20}{{}^5 \log 4} = \frac{{}^5 \log(5 \cdot 4)}{{}^5 \log 4} \\ &= \frac{{}^5 \log 5 + {}^5 \log 4}{{}^5 \log 4} = \frac{1 + {}^5 \log 4}{{}^5 \log 4} \\ &= \frac{1 + b}{b} \end{aligned}$$

8. ${}^c \log b = \frac{{}^a \log b}{{}^a \log c} = \frac{1}{{}^a \log c} = \frac{1}{{}^b \log c}$ dengan $a \neq 1, a > 0, b \neq 1, b > 0$, dan $c > 0$

Contoh:

Jika ${}^{25} \log 8 = a$, tentukan ${}^4 \log 5$.

$$\begin{aligned} {}^{25} \log 8 &= a \rightarrow \frac{\log 8}{\log 25} = a \\ \frac{3 \log 2}{2 \log 5} &= a \rightarrow \frac{\log 2}{\log 5} = \frac{2a}{3} \\ \frac{\log 2}{\log 5} &= \frac{2a}{3} \rightarrow \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{3}{2a} \\ {}^4 \log 5 &= \frac{\log 5}{\log 4} \end{aligned}$$

$$= \frac{\log 5}{2 \log 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{3}{4a}$$

9. $a \log b \cdot b \log c = a \log c$ dengan $a \neq 1, b \neq 1$, dan $a, b, c > 0$

Contoh:

Tentukan ${}^4 \log 6 \cdot {}^6 \log 16$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^4 \log 6 \cdot {}^6 \log 16 &= {}^4 \log 16 \\ &= {}^4 \log 4^2 \\ &= 2 \cdot {}^4 \log 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

E. Perpangkatan dengan logaritma

Untuk $a \neq 1, a > 0$ dan $b > 0$

10. $a^a \log b = b$

Contoh:

Tentukan $\sqrt{81}^{\sqrt{81}} \log 8$.

Pembahasan:

$$\sqrt{81}^{\sqrt{81}} \log 8 = 8$$

F. Sistem persamaan dengan Logaritma

Untuk $a \neq 1, a > 0, h(x) > 0$, dan $h(x) \neq 1$

11. Jika $p > 0$ dan ${}^a \log f(x) = {}^a \log p$, maka $f(x) = p$ asalkan $f(x) > 0$

Contoh:

Jika ${}^{27} \log 3^{6x} = 4$, maka nilai $x = \dots$.

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}^{27} \log 3^{6x} &= {}^{27} \log 27^4 \\ 3^{6x} &= (3^3)^4 \\ 3^{6x} &= 3^{12} \\ 6x &= 12 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

12. Jika ${}^a \log f(x) = {}^a \log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x) > 0, g(x) > 0$

Contoh:

Anggota himpunan penyelesaian dari persamaan ${}^2 \log(x^2 - 2x + 1) = {}^2 \log(2x^2 - 2)$ adalah

Pembahasan:

$$(1) \quad {}^2 \log(x^2 - 2x + 1) = {}^2 \log(2x^2 - 2)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2$$

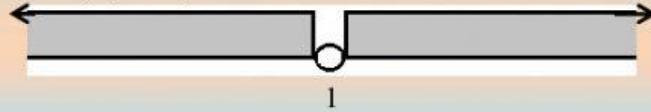
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -3 \text{ atau } x_2 = 1$$

$$(2) \quad x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$(x-1)(x-1) > 0$$



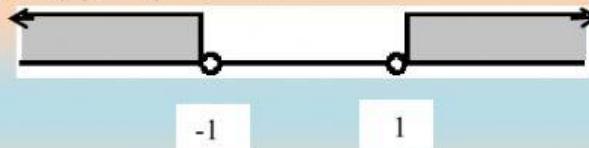
1

Sehingga syaratnya: $x > 1$ dan $x < 1$

$$(3) \quad 2x^2 - 2 > 0$$

$$2(x^2 - 1) > 0$$

$$2(x+1)(x-1) > 0$$



-1

1

Sehingga syaratnya: $x > 1$ dan $x < -1$ Dari (1), (2), dan (3), nilai x yang merupakan penyelesaian adalah $x = -3$.Karena apabila nilai x dari (1) disubtitusikan ke dalam (2) dan (3) yang hasil positif atau > 0 adalah -3 13. Jika ${}^{h(x)} \log f(x) = {}^{h(x)} \log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x) > 0, g(x) > 0$

Contoh:

Selesaikan ${}^x \log(x+1) = {}^{x^2} \log(5x-1)$ **Pembahasan:** x muncul sebagai bilangan pokok logaritma maka $x \neq 1$ dan $x > 0$, sehingga dimisalkan bilangan pokok logaritma 2

$${}^x \log(x+1) = {}^{x^2} \log(5x-1)$$

$${}^x \log(x+1) = \frac{1}{2} {}^x \log(5x-1)$$

$${}^x \log(x+1) = {}^x \log(5x-1)^{1/2}$$

$$(x+1) = (5x-1)^{1/2}$$

$$(x+1)^2 = (5x-1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 5x - 1$$

$$x^2 + 2x + 1 - (5x - 1) = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$
$$x_1 = 2 \text{ atau } x_2 = 1$$

Dalam hal ini $x_2 = 1$ tidak memenuhi syarat, maka $x_1 = 2$ merupakan jawaban persamaan.
Jadi himpunan jawaban persamaan adalah $\{2\}$.

14. Jika $A\{\log^2 f(x)\}^2 + B\{\log f(x)\}^2 + C = 0$, maka penyelesaian dapat ditentukan dengan mengubahnya menjadi persamaan kuadrat

Contoh:

Selesaikan persamaan $2(\log^2 x)^2 + 9(\log x)^2 + 4 = 0$

Pembahasan:

Dimisalkan $\log^2 x = y$ dan $\log x = z$, maka

$$\frac{y^2 - 9y + 4}{2} = 0$$
$$(2y - 1)(y - 4) = 0$$

Maka $y_1 = \frac{1}{2}$ dan $y_2 = 4$, substitusikan nilai y ke dalam salah satu persamaan

$$y_1 = \frac{1}{2} \rightarrow \log^2 x = \frac{1}{2}$$

Maka nilai $x = 2^{\frac{1}{2}}$

$$y_2 = 4 \rightarrow \log^2 x = 4$$

Maka nilai $x = 2^4$

Jadi, himpunan penyelesaian persamaan adalah $\{2^{\frac{1}{2}}, 2^4\}$

Tugas Latihan

Kerjakanlah soal dibawah ini !

1. Penyelesaian dari $7^{3\log x} = 1$ adalah

 - 0
 - $\frac{1}{3}$
 - 1
 - 3
 - 9

2. Nilai dari ${}^3 \log 6 + {}^3 \log 9 - {}^3 \log 2 =$

 - 1
 - 2
 - 8
 - 3
 - 9

3. Diketahui ${}^2 \log 3 = p$, maka ${}^4 \log 27 =$

 - $\frac{3}{2p}$
 - $\frac{3p}{2}$
 - $\frac{2}{3p}$
 - $\frac{2p}{3}$
 - $\frac{p}{3}$

4. Diketahui ${}^2 \log 5 = p$, dan ${}^2 \log 3 = q$, maka ${}^2 \log 30$ dapat dinyatakan sebagai

 - $1 + pq$
 - $1 + p + q$
 - $p + q$
 - pq
 - $\frac{p}{q}$

5. Diketahui ${}^3 \log 5 = m$, dan ${}^5 \log 7 = n$, maka ${}^3 \log 49$ dapat dinyatakan sebagai

 - $\frac{1}{2}(m + n)$
 - $2(m + n)$
 - $\frac{1}{2}mn$
 - $2mn$
 - $2m + n$

6. Penyelesaian ${}^7 \log(x + 1) + {}^7 \log(x - 5) = 1$ adalah

 - $x = -2$
 - $x = 2$
 - $x = 6$
 - $x = -2$ atau $x = 6$
 - $x = -6$ atau $x = 2$

7. Nilai dari $\frac{1}{a} \log b^2 \cdot \frac{1}{b} \log c^2 \cdot \frac{1}{c} \log a^2$ adalah

 - 2
 - 0
 - 2
 - 4
 - 8

8. Diketahui ${}^5 \log 3 = x$, maka $25^{{}^5 \log 3}$ adalah

 - 9
 - 3
 - 27
 - 1
 - 31

9. Carilah semua nilai x yang memenuhi persamaan

$${}^2 \log x + {}^2 \log(x + 1) = {}^2 \log 12$$

adalah

 - 1
 - 0
 - 1
 - 3
 - 12

10. Selesaikanlah persamaan ${}^3 \log {}^2 \log x = 0$.

 - 1
 - 2
 - 3
 - 8
 - 9