

Hubungan Sudut Pusat, Luas Juring, dan Panjang Busur

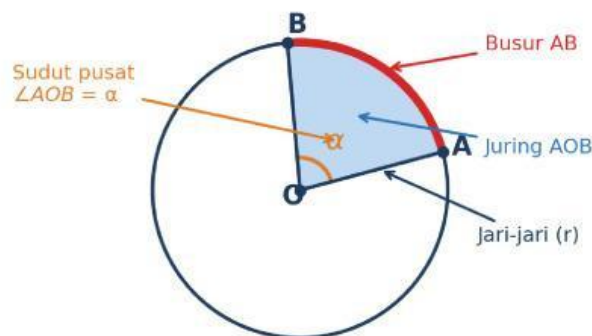
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, kamu diharapkan mampu:

- Menjelaskan unsur-unsur lingkaran: sudut pusat, busur, dan juring.
- Menjelaskan hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring.
- Menghitung panjang busur dan luas juring jika sudut pusatnya diketahui.
- Menyelesaikan soal perbandingan dua sudut pusat, dua panjang busur, dan dua luas juring.

A. Mengenal Sudut Pusat, Busur, dan Juring

Perhatikan lingkaran berpusat di titik O pada gambar di bawah. Dari titik O ditarik dua jari-jari, yaitu OA dan OB. Kedua jari-jari ini membagi lingkaran menjadi dua daerah dan menghasilkan tiga unsur penting:

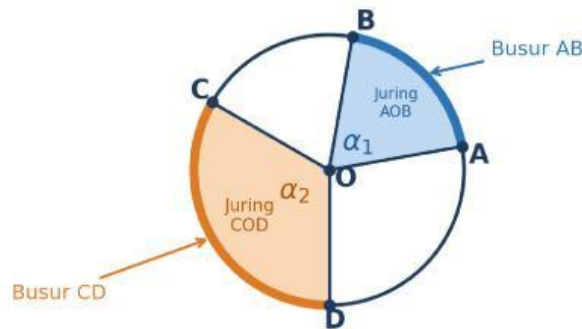


Gambar 1. Sudut pusat, busur, dan juring pada lingkaran

- Sudut pusat** adalah sudut yang titik sudutnya berada di pusat lingkaran dan kaki-kakinya berupa dua jari-jari. Pada Gambar 1, sudut pusatnya adalah $\angle AOB$ dengan besar α .
- Busur** adalah bagian dari keliling lingkaran yang terletak di antara dua titik pada lingkaran. Busur AB adalah garis lengkung yang berwarna merah (dibaca “busur AB”).
- Juring** adalah daerah di dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua jari-jari dan satu busur. Juring AOB adalah daerah yang diarsir biru.

B. Hubungan Dua Sudut Pusat, Dua Panjang Busur, dan Dua Luas Juring

Jika sudut pusat suatu juring diperbesar, maka busur di depannya menjadi lebih panjang dan daerah juringnya menjadi lebih luas. Sebaliknya, jika sudut pusatnya diperkecil, busur dan juringnya ikut mengecil. Hubungan ini bersifat **sebanding**.



Gambar 2. Dua juring pada satu lingkaran: juring AOB dengan sudut pusat α_1 dan juring COD dengan sudut pusat α_2

Teorema (Hubungan Sudut Pusat, Busur, dan Juring)

Pada lingkaran yang sama (atau lingkaran-lingkaran yang berjari-jari sama), perbandingan dua sudut pusat sama dengan perbandingan dua panjang busur dan sama dengan perbandingan dua luas juring.

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{\text{busur AB}}{\text{busur CD}} = \frac{\text{luas juring AOB}}{\text{luas juring COD}}$$

Dengan lambang pada Gambar 2, hubungan di atas dapat ditulis:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\text{busur AB}}{\text{busur CD}} = \frac{L_{AOB}}{L_{COD}}$$

Mengapa hubungan ini berlaku?

Satu putaran penuh di pusat lingkaran besarnya 360° , dan ini bersesuaian dengan seluruh keliling lingkaran ($K = 2\pi r$) serta seluruh luas lingkaran ($L = \pi r^2$). Sebuah juring dengan sudut pusat α merupakan $\alpha/360$ bagian dari lingkaran, sehingga:

$$\text{panjang busur} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times K \quad \text{luas juring} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times L$$

Untuk dua juring dengan sudut α_1 dan α_2 pada lingkaran yang sama, nilai K dan L-nya sama, sehingga saat dibandingkan faktor K (atau L) saling membagi habis dan tersisa perbandingan sudutnya saja:

$$\frac{\text{busur AB}}{\text{busur CD}} = \frac{\frac{\alpha_1}{360^\circ} \times K}{\frac{\alpha_2}{360^\circ} \times K} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

C. Rumus Panjang Busur dan Luas Juring

Dari uraian di atas, jika jari-jari lingkaran r dan sudut pusat α , maka:

Panjang busur	Luas juring
$\frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$	$\frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$

Contoh bagian lingkaran untuk beberapa sudut pusat yang sering muncul:

Sudut pusat (α)	Bagian lingkaran	Panjang busur	Luas juring
360°	1	$2\pi r$	πr^2
180°	$1/2$	πr	$\frac{1}{2}\pi r^2$
90°	$1/4$	$\frac{1}{2}\pi r$	$\frac{1}{4}\pi r^2$
60°	$1/6$	$\frac{1}{3}\pi r$	$\frac{1}{6}\pi r^2$
45°	$1/8$	$\frac{1}{4}\pi r$	$\frac{1}{8}\pi r^2$

Catatan

Gunakan $\pi = 22/7$ jika jari-jari kelipatan 7, dan $\pi = 3,14$ jika jari-jari bukan kelipatan 7 (kecuali soal menentukan lain). Satuan panjang busur adalah satuan panjang (cm, m), sedangkan satuan luas juring adalah satuan luas (cm^2 , m^2).

D. Contoh Soal dan Pembahasan

Contoh 1

Pada sebuah lingkaran berpusat di O, diketahui $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle COD = 90^\circ$, dan panjang busur AB = 12 cm. Tentukan panjang busur CD.

Penyelesaian:

Gunakan perbandingan sudut pusat dan busur:

$$\frac{\text{busur AB}}{\text{busur CD}} = \frac{\angle AOB}{\angle COD} \Rightarrow \frac{12}{\text{busur CD}} = \frac{60^\circ}{90^\circ}$$

$$\text{busur CD} = \frac{12 \times 90}{60} = 18 \text{ cm}$$

Jadi, panjang busur CD adalah 18 cm.

Contoh 2

Luas juring POQ = 56 cm^2 dengan $\angle POQ = 80^\circ$. Jika $\angle ROS = 120^\circ$ pada lingkaran yang sama, tentukan luas juring ROS.

Penyelesaian:

Gunakan perbandingan sudut pusat dan luas juring:

$$\frac{\text{luas juring POQ}}{\text{luas juring ROS}} = \frac{\angle POQ}{\angle ROS} \Rightarrow \frac{56}{L} = \frac{80^\circ}{120^\circ}$$

$$L = \frac{56 \times 120}{80} = 84 \text{ cm}^2$$

Jadi, luas juring ROS adalah 84 cm^2 .

Contoh 3

Diketahui $\angle AOB = 45^\circ$, panjang busur AB = 11 cm, dan panjang busur CD = 33 cm. Tentukan besar $\angle COD$.

Penyelesaian:

Gunakan perbandingan sudut pusat dan busur:

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{\text{busur AB}}{\text{busur CD}} \Rightarrow \frac{45^\circ}{x} = \frac{11}{33}$$

$$x = \frac{45^\circ \times 33}{11} = 135^\circ$$

Jadi, besar $\angle COD$ adalah 135° .

Contoh 4

Sebuah lingkaran berjari-jari 14 cm. Tentukan panjang busur dan luas juring yang sudut pusatnya 72° ($\pi = 22/7$).

Penyelesaian:

Sudut 72° merupakan $72/360 = 1/5$ bagian dari lingkaran.

$$\text{Panjang busur} = \frac{72^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14 = \frac{1}{5} \times 88 = 17,6 \text{ cm}$$

$$\text{Luas juring} = \frac{72^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = \frac{1}{5} \times 616 = 123,2 \text{ cm}^2$$

Jadi, panjang busurnya 17,6 cm dan luas juringnya 123,2 cm².

Contoh 5

Sebuah pizza berbentuk lingkaran berjari-jari 21 cm. Pizza dipotong sehingga satu potongan memiliki sudut pusat 45° . Tentukan panjang busur kulit potongan itu dan luas permukaan potongan pizza tersebut ($\pi = 22/7$).

Penyelesaian:

Sudut 45° adalah $45/360 = 1/8$ bagian dari lingkaran.

$$\text{Panjang busur} = \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21 = \frac{1}{8} \times 132 = 16,5 \text{ cm}$$

$$\text{Luas juring} = \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = \frac{1}{8} \times 1386 = 173,25 \text{ cm}^2$$

Jadi, panjang busur kulit potongan 16,5 cm dan luas permukaannya 173,25 cm².

Contoh 6

Pada sebuah lingkaran, $\angle AOB = 40^\circ$ dan $\angle COD = x$. Luas juring AOB = 20 cm^2 , luas juring COD = 60 cm^2 , dan panjang busur AB = 8 cm. Tentukan (a) besar x dan (b) panjang busur CD.

Penyelesaian:

(a) Gunakan perbandingan sudut pusat dan luas juring:

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{L_{AOB}}{L_{COD}} \Rightarrow \frac{40^\circ}{x} = \frac{20}{60} \Rightarrow x = \frac{40^\circ \times 60}{20} = 120^\circ$$

(b) Gunakan perbandingan sudut pusat dan busur:

$$\frac{\text{busur AB}}{\text{busur CD}} = \frac{40^\circ}{120^\circ} \Rightarrow \frac{8}{\text{busur CD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{busur CD} = 24 \text{ cm}$$

Jadi, $x = 120^\circ$ dan panjang busur CD = 24 cm.

E. Kesalahan yang Sering Terjadi

- **Membalik perbandingan.** Sudut pusat yang besar berpasangan dengan busur yang panjang dan juring yang luas. Pastikan juring yang sama berada di posisi yang sama (atas atau bawah) pada kedua ruas.
- **Lupa satuan luas.** Luas juring ditulis dalam cm^2 (bukan cm), sedangkan panjang busur dalam cm.
- **Membandingkan lingkaran berbeda.** Teorema ini hanya berlaku pada lingkaran yang sama atau lingkaran berjari-jari sama. Jika jari-jarinya berbeda, gunakan rumus panjang busur dan luas juring secara terpisah.
- **Salah memakai nilai π .** Perhatikan jari-jari: kelipatan 7 memakai $22/7$, selain itu biasanya 3,14.

F. Latihan Soal

Kerjakan soal-soal berikut. Kunci jawaban ada di bagian akhir.

1. Pada satu lingkaran, $\angle AOB = 30^\circ$ dan $\angle COD = 90^\circ$. Jika luas juring AOB = 25 cm^2 , tentukan luas juring COD.
2. Diketahui panjang busur PQ = 15 cm dengan $\angle POQ = 75^\circ$. Jika $\angle ROS = 125^\circ$, tentukan panjang busur RS.
3. Pada satu lingkaran, $\angle AOB = 48^\circ$ dan $\angle COD = 72^\circ$. Panjang busur AB = 16 cm dan luas juring AOB = 64 cm^2 . Tentukan (a) panjang busur CD dan (b) luas juring COD.
4. Sebuah lingkaran berjari-jari 21 cm. Tentukan panjang busur dan luas juring yang sudut pusatnya 120° ($\pi = 22/7$).
5. Dua juring pada lingkaran yang sama memiliki luas 120 cm^2 dan 180 cm^2 . Jika sudut pusat juring pertama 80° , tentukan sudut pusat juring kedua.
6. (Tantangan) Sebuah lingkaran dibagi menjadi tiga juring dengan perbandingan sudut pusat 2 : 3 : 4. Jika panjang busur terpendek 10 cm, tentukan panjang dua busur yang lain dan keliling lingkaran tersebut.

G. Kunci Jawaban Latihan

1. Luas juring COD = $25 \times 90/30 = 75 \text{ cm}^2$.
2. Busur RS = $15 \times 125/75 = 25 \text{ cm}$.
3. (a) Busur CD = $16 \times 72/48 = 24 \text{ cm}$. (b) Luas juring COD = $64 \times 72/48 = 96 \text{ cm}^2$.
4. Sudut $120^\circ = 1/3$ lingkaran. Panjang busur = $1/3 \times 2 \times 22/7 \times 21 = 44 \text{ cm}$. Luas juring = $1/3 \times 22/7 \times 21 \times 21 = 462 \text{ cm}^2$.
5. Sudut kedua = $80^\circ \times 180/120 = 120^\circ$.
6. Jumlah perbandingan $2 + 3 + 4 = 9$, sehingga sudutnya 80° , 120° , dan 160° . Busur terpendek (80°) = 10 cm , maka busur kedua = $10 \times 120/80 = 15 \text{ cm}$ dan busur ketiga = $10 \times 160/80 = 20 \text{ cm}$. Keliling lingkaran = $10 + 15 + 20 = 45 \text{ cm}$.

Rangkuman

- Sudut pusat, panjang busur, dan luas juring pada lingkaran yang sama saling **sebanding**.
- Perbandingan dua sudut pusat = perbandingan dua panjang busur = perbandingan dua luas juring.

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\text{busur}_1}{\text{busur}_2} = \frac{L_{\text{juring 1}}}{L_{\text{juring 2}}}$$

- Panjang busur = $\alpha/360^\circ \times 2\pi r$ dan luas juring = $\alpha/360^\circ \times \pi r^2$.

Menghubungkan Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Luas Juring

Nama : _____

Tanggal : _____

Petunjuk

Hubungkan setiap soal di kolom kiri dengan jawaban yang benar di kolom kanan. Tarik garis dari titik (○) di samping soal ke titik (○) di samping jawaban. Kerjakan perhitungan di buku coretan, gunakan penggaris, dan perhatikan bahwa **ada 2 jawaban yang tidak terpakai**.

SOAL		JAWABAN
1 Pada satu lingkaran, $\angle AOB = 30^\circ$ dan $\angle COD = 90^\circ$. Jika luas juring $AOB = 25 \text{ cm}^2$, berapa luas juring COD ?	○	☐ A 120°
2 Panjang busur $PQ = 15 \text{ cm}$ dengan $\angle POQ = 75^\circ$. Jika $\angle ROS = 125^\circ$, berapa panjang busur RS ?	○	☐ B 44 cm
3 Pada satu lingkaran, $\angle AOB = 48^\circ$ dan $\angle COD = 72^\circ$. Jika panjang busur $AB = 16 \text{ cm}$, berapa panjang busur CD ?	○	☐ C 84 cm^2
4 Lingkaran berjari-jari 21 cm . Berapa panjang busur yang sudut pusatnya 120° ? ($\pi = 22/7$)	○	☐ D 25 cm
5 Lingkaran berjari-jari 21 cm . Berapa luas juring yang sudut pusatnya 120° ? ($\pi = 22/7$)	○	☐ E 135°
6 Dua juring pada lingkaran yang sama berluas 120 cm^2 dan 180 cm^2 . Jika sudut pusat juring pertama 80° , berapa sudut pusat juring kedua?	○	☐ F 462 cm^2
7 Diketahui $\angle AOB = 45^\circ$, panjang busur $AB = 11 \text{ cm}$, dan panjang busur $CD = 33 \text{ cm}$. Berapa besar $\angle COD$?	○	☐ G $17,6 \text{ cm}$
8 Lingkaran berjari-jari 14 cm . Berapa panjang busur yang sudut pusatnya 72° ? ($\pi = 22/7$)	○	☐ H 18 cm
		☐ I 75 cm^2
		☐ J 24 cm