

FASE F

MATEMATIKA LKPD

FUNGSI KOMPOSISI

Kelompok :

Anggota :

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

Kelas

XI

SMA



Capaian Pembelajaran

Di akhir fase F, peserta didik dapat menentukan fungsi invers, komposisi fungsi, dan transformasi fungsi untuk memodelkan situasi dunia nyata menggunakan fungsi yang sesuai (linear, kuadrat, eksponensial).

Tujuan Pembelajaran

11.5 menganalisis sifat-sifat fungsi komposisi secara terbatas dalam bentuk soal kontekstual;

11.6 membuat model matematika berkaitan dengan komposisi fungsi dalam kehidupan sehari-hari dan menyelesaikannya secara logis;

Pertanyaan Pemantik

Pada pembuatan Kain Besurek, kain dasar diberi motif terlebih dahulu, kemudian diwarnai. Jika urutan kedua proses tersebut dibalik, apakah hasil akhirnya akan sama? Bagaimana kita dapat menentukan dan membuktikannya menggunakan komposisi fungsi?

Petunjuk Penggunaan

- Bacalah setiap cerita dengan teliti.
- Perhatikan urutan proses dalam setiap masalah.
- Ingat bahwa hasil dari proses pertama menjadi masukan bagi proses kedua.
- Diskusikan setiap langkah bersama anggota kelompok.
- Tuliskan alasan, bukan hanya jawaban akhir.
- Jika mengalami kesulitan, gunakan Kartu Bantuan yang diberikan guru.
- Setiap anggota kelompok harus memahami penyelesaian karena siapa pun dapat diminta menjelaskan.
- Gunakan bahasa sehari-hari terlebih dahulu jika lebih mudah, kemudian tuliskan dalam bahasa matematika.
- Lakukan self-check sebelum mengumpulkan LKPD.
- Hargai perbedaan cara berpikir, bahasa, logat, dan pendapat teman.

MATERI PENGUATAN

Konsep Fungsi Komposisi

A. KONSEP FUNGSI KOMPOSISI

Fungsi komposisi adalah fungsi baru yang diperoleh dengan menggabungkan dua fungsi atau lebih secara berurutan.

Jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$, maka komposisi g dengan f ditulis:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Artinya, x diproses terlebih dahulu oleh fungsi f . Hasil $f(x)$ kemudian menjadi input bagi fungsi g .

$$x \rightarrow f \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$$

B. LANGKAH MENENTUKAN KOMPOSISI

Contoh: Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = x^2$. Tentukan $(g \circ f)(x)$.

$$\text{Langkah 1: } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$\text{Langkah 2: } g(f(x)) = (2x + 1)^2$$

$$\text{Langkah 3: } (g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

Jadi, untuk menentukan $g \circ f$, masukkan $f(x)$ ke dalam fungsi g .

C. KOMPOSISI DENGAN URUTAN BERBEDA

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Dengan contoh di atas: $f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$.

Perhatikan bahwa hasilnya berbeda. Jadi, pada umumnya $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

Memodelkan cerita kontekstual

Dalam soal kontekstual, informasi yang diberikan perlu diubah terlebih dahulu menjadi aturan fungsi. Perhatikan banyaknya proses yang terjadi dalam situasi tersebut.

Jika terdapat satu fungsi

Jika suatu situasi hanya memiliki satu proses, maka situasi tersebut dapat dimodelkan dengan satu aturan fungsi.

- Tentukan nilai awal atau masukan sebagai x .
- Tentukan proses yang terjadi pada x .
- Nyatakan hasil dari proses tersebut sebagai $f(x)$.
- Bentuk fungsi dituliskan sebagai:

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

- Jadi, jika hanya terdapat satu proses, model matematikanya cukup berupa:

$$f(x)$$

Jika terdapat dua fungsi

Jika suatu situasi memiliki dua proses yang dilakukan secara berurutan, maka setiap proses dimodelkan dengan fungsi yang berbeda.

Tentukan nilai awal sebagai x .

Proses pertama dimodelkan dengan fungsi f , sehingga menghasilkan $f(x)$.

Hasil $f(x)$ menjadi masukan untuk proses kedua.

Proses kedua dimodelkan dengan fungsi g .

Hasil akhirnya dituliskan sebagai $g(f(x))$

Alurnya:
$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

Sehingga bentuk fungsi komposisinya adalah:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Orientasi Peserta Didik pada Masalah (±10 Menit)

Bengkulu memiliki beragam budaya yang diwariskan dari generasi ke generasi. Dalam pelaksanaannya, berbagai kegiatan budaya memiliki tahapan yang dilakukan secara berurutan. Menariknya, perubahan urutan suatu proses dapat memengaruhi hasil akhirnya.

Hari ini, kalian diminta menjadi "Tim Penyelidik Proses Budaya Bengkulu". Kalian akan mengamati tiga kegiatan, yaitu Kain Besurek, pendap, dan Tari Andun.

Kasus 1 - Kain Besurek



Kain Besurek merupakan kain batik khas Bengkulu yang terkenal dengan motif kaligrafi dan bunga Raflesia. Sebuah rumah produksi Kain Besurek di Bengkulu menghitung total biaya pembuatan kain berdasarkan jumlah kain dasar (x lembar) melalui dua tahap utama:

Tahap I (Pemberian Motif):

Setiap lembar kain dasar membutuhkan bahan lilin/malam dan jasa menggambar sebesar Rp50.000,00 per lembar. Selain itu, ada biaya operasional tetap cetak motif sebesar Rp100.000,00 untuk sekali proses produksi.

Tahap II (Pewarnaan & Finishing):

Setelah motif selesai, kain diwarnai dan dibilas (nglorot). Biaya tahap ini dihitung dari total biaya Tahap I ditambah biaya bahan pewarna alami sebesar Rp150.000,00.

(Petunjuk: Bentuk fungsi linear dinyatakan dengan $f(x) = ax + b$).

Berdasarkan cerita di atas, jawablah pertanyaan berikut:

1. Tentukan rumus fungsi $f(x)$ yang menyatakan biaya kain setelah diberi motif!
2. Tentukan rumus fungsi $g(x)$ yang menyatakan biaya kain setelah proses pewarnaan!
3. Tentukan bentuk fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$!
4. Tentukan total biaya yang dikeluarkan untuk pembuatan 20 lembar kain!

Kasus 2 – Pendap



Pendap merupakan salah satu makanan khas Bengkulu yang dalam proses penyajiannya memerlukan beberapa tahapan. Dalam sebuah kegiatan bazar budaya, panitia menyiapkan paket bahan pendap.

Tahap pertama adalah menyiapkan bahan, yang dinyatakan dengan fungsi $f(x) = x + 5$

Kemudian bahan yang telah disiapkan dikemas, yang dinyatakan dengan fungsi $g(x) = 2x$, dengan x menyatakan banyak paket bahan.

Panitia memiliki 25 paket bahan awal.

- Tentukan bentuk $(g \circ f)(x)$
- Tentukan nilai $(g \circ f)(25)$
- Tentukan bentuk $(f \circ g)(x)$
- Tentukan nilai $(f \circ g)(25)$
- Bandingkan $(g \circ f)(25)$ dan $(f \circ g)(25)$
- Apakah hasilnya sama? Apa yang dapat kalian simpulkan tentang urutan dalam komposisi fungsi?

Mengorganisasikan Peserta Didik untuk Belajar (± 10 Menit)

Dalam Setiap Kelompok, Kita Punya Peran!

Guru membagi peran dalam kelompok (pencatat, penghitung, pengecek, juru bicara), dengan memberi kesempatan peserta didik yang belum nyaman berbicara untuk memilih peran pencatat, penghitung, atau pengecek.

Pencatat



Mencatat hasil diskusi, ide, dan kesimpulan kelompok.



Penghitung



Menghitung data, angka, atau hasil yang diperlukan dalam penyelesaian tugas.



Pengecek



Memeriksa kembali hasil kerja, memastikan tidak ada kesalahan, dan memberi saran jika diperlukan.



Juru Bicara



Menyampaikan hasil diskusi kelompok di depan kelas.



Pilihlah peran yang sesuai dengan minat dan kenyamananmu. Setiap peran penting, semua berkontribusi!

Bentuklah kelompok yang terdiri dari 4-5 orang. Bagilah peran dalam kelompok secara adil, tuliskan nama untuk masing-masing peran di tabel berikut.

Peran	Nama Siswa
Pencatat	
Penghitung	
Pengecek	
Juru bicara	

MASALAH 1 – Biaya Produksi Kain Besurek

Dalam proses pembuatan Kain Besurek di Bengkulu, biaya produksi dihitung melalui dua tahap berurutan: pemberian motif dan pewarnaan.

Misalkan:

x = banyak kain dasar (lembar).

$f(x)$ = biaya produksi setelah tahap pemberian motif (dalam rupiah)

$g(x)$ = total biaya produksi setelah tahap pewarnaan (dalam rupiah)

Sebuah rumah produksi menetapkan bahwa setiap lembar kain membutuhkan biaya motif Rp50.000,00 dengan biaya operasional tetap Rp100.000,00, serta biaya tambahan pewarnaan sebesar Rp150.000,00 dari total biaya tahap pertama.

Jika pengrajin akan membuat 20 lembar kain dasar, tentukan total biaya produksi setelah melalui kedua proses tersebut.

Ayo Selidikil

1. Temukan informasi dari masalah.

Informasi	Hasil Temuan
Banyak kain dasar (x)	20
Biaya variabel Tahap I (per lembar)	50.000
Biaya tetap Tahap I	
Biaya tambahan Tahap II	
Yang ditanyakan	total biaya produksi untuk kain dasar

2. Pemodelan rumus fungsi $f(x)$ dan $g(x)$

Berdasarkan informasi yang telah kalian temukan, tentukan rumus matematika untuk masing-masing tahap:

Fungsi Tahap I:

Setiap lembar membutuhkan biaya Rp50.000,00 dan terdapat biaya tetap Rp100.000,00.

(Gunakan bentuk $f(x) = ax + b$)

Rumus fungsi $f(x)$:

$f(x) = \dots\dots\dots x + 100.000.$

Fungsi Tahap II:

Biaya pewarnaan menambahkan 150.000,00 dari total biaya tahap pertama (x).

Rumus fungsi $g(x)$:

$g(x) = x + 150.000$

MASALAH 1 – Biaya Produksi Kain Besurek

3. Perhatikan Urutan Proses Perhitungan Biaya

Lengkapi alur proses perhitungan biaya berikut.

x kain dasar → Biaya Tahap I $f(x) = \dots\dots\dots x + 100.000$

→ Biaya Tahap II $g(x) = x + 150.000$

Menurut kelompokmu, fungsi mana yang harus dihitung terlebih dahulu? Mengapa?

Jawab:

Fungsi f harus dihitung terlebih dahulu karena biaya pada tahap pewarnaan fungsi g dihitung dari total biaya yang sudah dikeluarkan pada tahap pemberian motif.

4. Tentukan komposisi fungsi.

Karena biaya Tahap I (f) dihitung terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan dengan perhitungan biaya Tahap II (g), maka fungsi komposisinya adalah:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Lengkapi langkah-langkah menentukan rumus fungsi komposisinya:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(50.000x + \dots\dots\dots)$$

$$= (\dots\dots\dots x + 100.000) + 150.000$$

$$(g \circ f)(x) = 50.000x + 250.000$$

5. Tentukan Total Pengeluaran untuk 20 Lembar Kain

Substitusikan nilai $x = 20$ ke dalam rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ yang telah kalian temukan:

$$(g \circ f)(x) = 50.000x + 250.000$$

$$(g \circ f)(20) = 50.000(\dots\dots) + 250.000$$

$$= \dots\dots\dots + 250.000$$

$$= \dots\dots\dots$$

6. Interpretasikan Hasilnya

Jadi, total biaya produksi yang harus dikeluarkan oleh rumah produksi untuk membuat 20 lembar Kain Besurek dari tahap pemberian motif hingga pewarnaan adalah sebesar

Rp $\dots\dots\dots$

Membimbing Penyelidikan Individu dan Kelompok (±25 Menit)

MASALAH 2 - Pendap

Dalam menyiapkan pendap, bahan-bahan terlebih dahulu disiapkan. Setelah bahan siap, bahan tersebut kemudian dikemas menjadi paket.

Misalkan:

- x = banyak paket bahan yang tersedia.
- $f(x) = x + 5$ menyatakan banyak bahan setelah proses persiapan.
- $g(x) = 2x$ menyatakan banyak bahan setelah proses pengemasan.

Jika tersedia 25 paket bahan, tentukan hasil jika proses dilakukan dengan urutan persiapan kemudian pengemasan, dan bandingkan dengan urutan sebaliknya.

Ayo Selidiki!

1. Temukan Informasi dari Permasalahan

Pertanyaan	Jawaban
Apa yang menjadi input?	Banyak paket bahan awal yang tersedia (25 paket)
Apa proses pertama dalam konteks pendap?	Persiapan bahan (ditambah paket bahan)
Apa fungsi proses pertama?	$f(x) = x + \dots\dots\dots$
Apa proses kedua?	Pengemasan bahan (dikemas menjadi 2 porsi/paket)
Apa fungsi proses kedua?	$g(x) = \dots\dots\dots x$
Berapa banyak paket bahan?	25 paket bahan ($x = \dots\dots\dots$)
Apa yang harus dibandingkan?	Hasil dari urutan $(g \circ f)(25)$ dan urutan sebaliknya $(f \circ g)(25)$

2. Susun kedua kemungkinan urutan proses.

Urutan pertama: Persiapan $\rightarrow$ Pengemasan

x paket bahan $\rightarrow$ proses $f \rightarrow x + \dots \rightarrow$ proses $g \rightarrow 2(x + \dots)$

Urutan kedua: Pengemasan $\rightarrow$ Persiapan

x paket bahan $\rightarrow$ proses $g \rightarrow 2x \rightarrow$ proses $f \rightarrow 2x + \dots$

3. Tentukan komposisi fungsi untuk urutan pertama.

Karena proses f dilakukan terlebih dahulu kemudian g , maka:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f)(x) = g(5 + \dots\dots\dots) = \dots\dots (5 + \dots\dots\dots) = 2x + \dots\dots$$

Kemudian tentukan hasilnya untuk 25 paket bahan:

$$(g \circ f)(25) = 2(25) + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

4. Tentukan komposisi fungsi untuk urutan kedua.

Karena proses g dilakukan terlebih dahulu kemudian f , maka:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = \dots\dots (2x) = 2x + \dots\dots\dots$$

Kemudian tentukan hasilnya untuk 25 paket bahan:

$$(f \circ g)(25) = 2(25) + \dots\dots\dots = 50 + \dots\dots = \dots\dots$$

5. Bandingkan kedua hasil.

$$(g \circ f)(25) = 60$$

$$(f \circ g)(25) = 55$$

Apakah kedua hasil tersebut sama?

Jawab:

Menurut kelompokmu, apakah urutan proses memengaruhi hasil? Jelaskan.

Ya, urutan proses sangat memengaruhi hasil. Secara matematika, komposisi fungsi tidak bersifat komutatif. Secara kontekstual, menambahkan bahan sebelum dikemas membuat bahan tambahan ikut terlipat ganda saat dikemas.

Mengembangkan dan menyajikan hasil karya (±12 menit)

Setelah menyelesaikan penyelidikan untuk ketiga kasus di atas, selanjutnya susunlah hasil diskusi kelompokmu ke dalam bentuk karya yang menarik, lalu siapkan diri untuk mempresentasikannya dan saling memberikan tanggapan secara santun.

- Sajikan hasil penyelesaian dari ketiga konteks menggunakan media yang sesuai dengan kesepakatan kelompok (seperti tulisan bertahap, diagram alir, poster, penjelasan lisan, atau video singkat).
- Presentasikan hasil karya kelompokmu di depan kelas, serta berikan tanggapan, tanggapan balik, atau pertanyaan kepada kelompok lain secara santun.



Bentuk penyajian yang dipilih:

Hal yang harus ditampilkan:

aturan fungsi → komposisi → perhitungan → alasan → kesimpulan.

.....

.....

.....

Tanggapan kelompok lain:

Apa yang sudah kuat?

.....

.....

.....

Apa yang perlu diperbaiki?

.....

.....

.....

Menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah (±8 menit)

Setelah mempresentasikan hasil kerja dan mendengarkan masukan dari guru serta kelompok lain, periksalah kembali jawabanmu lalu lengkapi simpulan berikut:

Tuliskan aturan umum fungsi komposisi.

.....

.....

.....

Apakah $(g \circ f)(x)$ selalu sama dengan $(f \circ g)(x)$? Mengapa?

.....

.....

.....

Apakah perubahan urutan fungsi memengaruhi hasil akhir? Jelaskan alasannya berdasarkan hasil penyelidikanmu!

.....

.....

.....

Asessmen Formatif

- 1 Sanggar Besurek di Kota Bengkulu membuat selendang Kain Besurek bermotif bunga Rafflesia melalui dua proses berurutan.
 Proses 1 (pemberian motif): setiap lembar kain dasar dibuat menjadi 2 selendang bermotif, ditambah 3 selendang bermotif dari stok sanggar. Banyak selendang bermotif merupakan fungsi f dari banyak kain dasar x .
 Proses 2 (pewarnaan): setiap selendang bermotif membutuhkan 4 sendok pewarna alami, ditambah 6 sendok untuk perendaman awal. Banyak sendok pewarna merupakan fungsi g dari banyak selendang bermotif y .
 - Tuliskan aturan fungsi $f(x)$ dan $g(y)$!
 - Tentukan aturan fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$!
 - Berapa sendok pewarna yang dibutuhkan jika sanggar memakai 15 lembar kain dasar?
 - Jelaskan dengan kata-katamu sendiri apa arti $(g \circ f)(x)$ pada pembuatan Kain Besurek tersebut!
- 2 Ibu Rina membuat pendap, makanan khas Bengkulu yang dibungkus daun talas. Pekerjaannya terdiri atas dua proses:
 Proses 1 (menyiapkan adonan): $f(x) = 4x + 2$, dengan x banyak paket bahan dan $f(x)$ banyak adonan.
 Proses 2 (mengemas): $g(y) = 2y + 3$, dengan y banyak adonan dan $g(y)$ banyak bungkus pendap (setiap adonan menjadi 2 bungkus, ditambah 3 bungkus contoh untuk pembeli).
 - Tentukan aturan $(g \circ f)(x)$!
 - Tentukan aturan $(f \circ g)(x)$!
 - Jika Ibu Rina memakai 12 paket bahan, hitunglah $(g \circ f)(12)$ dan $(f \circ g)(12)$!
 - Apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$? Urutan manakah yang sesuai dengan urutan kerja Ibu Rina? Jelaskan alasanmu!
- 3 Sanggar tari di Kota Bengkulu menyiapkan pertunjukan Tari Andun, tari tradisional Bengkulu yang dibawakan secara berpasangan. Persiapan melalui tiga proses berurutan:
 Proses 1 (seleksi): dari x pendaftar, 3 orang tidak lolos.
 Proses 2 (pemasangan): setiap penari yang lolos dipasangkan dengan satu penari pendamping dari sanggar, sehingga banyak penari menjadi dua kali lipat.
 Proses 3 (persiapan akhir): 5 penari mengundurkan diri karena sakit.
 - Tuliskan aturan fungsi $f(x)$, $g(y)$, dan $h(z)$ untuk ketiga proses tersebut!
 - Tentukan aturan $(h \circ g \circ f)(x)$!
 - Berapa penari yang siap tampil jika pendaftarnya 24 orang?
 - Sanggar menargetkan 31 penari siap tampil. Berapa pendaftar yang dibutuhkan?
 - Jika Proses 2 dan Proses 3 ditukar (5 penari mundur lebih dahulu, baru dipasangkan), apakah banyak penari siap tampil untuk 24 pendaftar tetap sama? Jelaskan dengan perhitungan!
- 4 Ibu Rina mengolah durian menjadi lempuk durian, oleh-oleh khas Bengkulu. Banyak bungkus lempuk dari x buah durian adalah $f(x) = 3x + 1$. Biaya pengemasan y bungkus lempuk adalah $g(y) = 2.000y + 5.000$ (dalam rupiah). Dika menentukan biaya pengemasan dari x buah durian dengan menulis:
 $(g \circ f)(x) = g(x) \times f(x) = (2.000x + 5.000)(3x + 1)$
 - Jelaskan letak kesalahan Dika!
 - Tentukan aturan $(g \circ f)(x)$ yang benar!
 - Berapa biaya pengemasan jika Ibu Rina mengolah 8 buah durian?
 - Biaya pengemasan yang dikeluarkan Rp91.000. Berapa buah durian yang diolah?
- 5 Menjelang peringatan tradisi Tabut di Kota Bengkulu, panitia lomba tabut mini tingkat sekolah menyiapkan hiasan. Setiap tabut mini memerlukan 4 lembar kertas hias, ditambah 10 lembar kertas untuk hiasan panggung lomba. Kertas dibeli di toko dengan harga Rp1.500 per lembar dan ongkos antar Rp20.000. Misalkan f menyatakan banyak kertas hias yang dibutuhkan untuk x tabut mini, dan g menyatakan biaya total pembelian y lembar kertas.
 - Tuliskan aturan fungsi $f(x)$ dan $g(y)$!
 - Tentukan aturan $(g \circ f)(x)$!
 - Gunakan aturan pada (b) untuk menghitung biaya total jika panitia membuat 15 tabut mini!
 - Anggaran panitia Rp155.000 dan akan dihabiskan seluruhnya. Berapa tabut mini yang dapat dibuat?
 - Hitung kembali biaya untuk 15 tabut mini dengan cara bertahap (hitung $f(15)$ lebih dahulu, lalu g dari hasilnya). Samakah hasilnya dengan jawaban (c)? Apa artinya?